I TEMPI E LE FORME / 3

FILOSOFIA

I lettori che desiderano
informazioni sui volumi
pubblicati dalla casa editrice
possono rivolgersi direttamente a:

Carocci editore

Corso Vittorio Emanuele II, 229
00186 Roma
telefono 06 42 81 84 17
fax 06 42 74 79 31

Siamo su:
www.carocci.it
www.facebook.com/caroccieditore
www.twitter.com/caroccieditore

Scienza e filosofia della complessità

Studi in memoria di Aldo Giorgio Gargani

A cura di Angelo Marinucci, Stefano Salvia e Luca Bellotti

Prefazione di Alfonso Maurizio Iacono

Carocci editore

Volume pubblicato con il contributo del Dipartimento di Civiltà
e Forme del Sapere dell'Università di Pisa, che ha avuto il riconoscimento
di Eccellenza del MIUR per la qualità dei progetti di ricerca.

1ª edizione, settembre 2020

Realizzazione editoriale: Edimill, Bologna

Finito di stampare nel settembre 2020
dalla Litografia Varo (Pisa)

ISBN 978-88-290-0167-5

Indice

È un fatto che gli uomini hanno prodotto assai più cose di quanto siano propensi ad ammettere; ma ciò che essi hanno eretto nella forma di costruzioni concettuali elevate e sublimi, come se fossero separate dal caso e dal disordine, corrisponde ad un uso che essi hanno fatto della propria vita.

Gargani (2009, p. IX)

Prefazione
Aldo G. Gargani:
la filosofia come analisi delle possibilità

di *Alfonso Maurizio Iacono*

Gargani aveva offerto una riflessione epistemologica e critica sullo statuto del sapere scientifico con il *Sapere senza fondamenti*, pubblicato nel 1975 e destinato a influenzare il dibattito successivo sulla scienza. In questo saggio Gargani riusciva felicemente a sintetizzare i suoi studi su Wittgenstein e l'impatto che alcuni anni prima aveva suscitato il saggio di Thomas Kuhn *La struttura delle rivoluzioni scientifiche* con i temi del feticismo in Marx e in Freud e con la critica sociale della Scuola di Francoforte. Parlò di *feticci epistemologici* e di cerimoniali della scienza e in modo indiretto (e come egli era solito dire, con una sua propensione a vivere eventi storici e sociali con ritardo) parlò del Sessantotto, un evento che all'inizio egli visse in modo antipatetico e che poi fece suo storicamente e teoricamente. In modo indiretto: è interessante notare come nelle ricerche teoriche e storiche quel che affiora meno esplicitamente lascia tuttavia un segno maggiore e permanente. Nel 1979 curò una raccolta di saggi a cui diede il titolo di *Crisi della ragione*. Un libro che incrinava un certo manicheismo di sinistra, aduso a dividere il mondo in razionalisti e irrazionalisti, in buoni e cattivi. Niente a che vedere con quel che diventerà il cosiddetto *pensiero debole*, molto a che vedere con una ragione che si interroga e diventa critica di sé stessa. Ma allora un eccesso di critica interna spingeva al sospetto e alla domanda: «Da che parte stai?». Gargani stava dalla parte di chi, con Wittgenstein, non accettava il fatto che lo stare da una parte, l'appartenenza, potesse significare la perdita del senso critico giustificata dalla paura di passare, come si diceva allora, dall'altra parte. Tutto questo può forse sembrare lontano, ma non lo è poi tanto. La rigidità ideologica vestita dei panni del moralismo perbenista era vissuta da Gargani come ripugnante.

Il *Sapere senza fondamenti* fu un libro per lui liberatorio. Dopo di allora i suoi studi su Wittgenstein e sull'epistemologia scientifica si sono accompagnati a interessi di tipo letterario, teatrale, musicale. Si confrontò con la Vienna di fine secolo e con Hofmannstahl. Scrisse su Thomas Bernhard e lo imitò perfino nello stile. Ma il suo scrittore di riferimento fu soprattutto Robert Musil. In letteratura Musil fu per Gargani quel che Wittgenstein fu in filosofia. Amava citare lunghi brani dell'*Uomo senza qualità* e in un certo senso, come per Wittgenstein, vi si identificava. Entrambi, Wittgenstein e Musil, filosofi per così dire laterali, fuori dagli schemi, asistematici, genialmente fallimentari, se si parte dal presupposto professorale che una filosofia deve essere in certo modo sistematica e interna alla storia della filosofia.

Con il passare degli anni la sua interpretazione di Wittgenstein da un lato lo portò verso il teatro, introducendo una pratica del fare filosofia attraverso la scena che non voleva essere tanto spettacolo quanto piuttosto ricerca. In questo senso trasformò la sua passione per il cinema in un rapporto teorico con la filosofia. Attraverso l'idea di narrazione Gargani, in parte influenzato dal suo amico Richard Rorty, ritornò alle questioni dello statuto del sapere scientifico. Ma l'ultimo suo libro fu ancora sull'autore prediletto, Wittgenstein, questa volta con una forte accentuazione dei temi antropologici, psicologici, letterari, gestuali, narrativi. Tutto questo attraverso un discorso che faceva riferimento alla fisica e alle scienze naturali. Nell'ultimo libro come nell'ultimo saggio, uscito nella rivista "Il Pensiero", in un numero dedicato a Wittgenstein, Gargani rilevò l'importanza delle teorie e delle riflessioni epistemologiche di Ludwig Boltzmann, che avevano influito sulle idee di Wittgenstein. Tali riflessioni sottolineavano l'idea di una conoscenza dove non vi è corrispondenza con la realtà e dove la filosofia si presenta come *analisi delle possibilità*. Gargani nei suoi ultimi giorni mi regalò il numero della rivista dicendomi che quel saggio che egli aveva scritto chiariva ancora meglio il suo punto di vista sulla filosofia e su Wittgenstein.

> La filosofia – egli scrive – è una pratica simbolica che si assume e che poi si può rilasciare o abbandonare per poi riprenderla nell'attualità di un problema (si tratti dei fondamenti della matematica, dell'esperienza privata, delle menti altrui, della certezza, del rapporto semantico fra la parola *forse*, termine non denotativo, e la parola *mela*, termine denotativo) nel quale ci imbattiamo perché intriga, turba, sgomenta il nostro pensiero e magari anche la nostra vita.

Introduzione

di *Angelo Marinucci* e *Stefano Salvia*

Da oltre un secolo le scienze fisico-matematiche e biologiche stanno producendo una serie di risultati teorici e sperimentali la cui accettazione impone una presa di distanza dalla concettualità e dalle strategie euristiche proprie della fisica classica: si pensi alla termodinamica statistica e al problema dell'irreversibilità legata alla crescita di entropia, alla meccanica quantistica e alle nozioni di indeterminazione e decoerenza, allo studio sia analitico che numerico dei sistemi non-lineari, deterministici o stocastici. Le possibilità e le configurazioni di un sistema fisico e del suo "ambiente" non sono sempre riducibili a un insieme precostituito dalla semplice somma dei suoi elementi. Esistono pertanto *possibilità* che vanno *al di là della determinazione*, nel senso che le proprietà, le attività e l'evoluzione dei sistemi complessi sono sovraordinate rispetto a qualsiasi modello matematico elaborato dai fisici, che per cercare di descriverli e spiegarli devono necessariamente selezionare un numero limitato di variabili e parametri di controllo, rilevanti solo per un particolare metodo adottato.

Ripensare i rapporti tra matematica, fisica, biologia e filosofia nell'ottica di una nuova teoria integrata e generale dei sistemi significa innanzitutto intraprendere una ricognizione storica intorno alle radici dell'impostazione metodologica classica, improntata allo studio esclusivamente analitico di equazioni differenziali e integrali lineari, così come è andata affermandosi tra Sette e Ottocento. In secondo luogo, si tratta di individuare i nuovi quesiti a cui gli strumenti concettuali ed euristici della fisica matematica classica non sono in grado di dare una risposta, per poi affrontare diversamente problemi tradizionali e inediti alla luce delle nuove metodologie di ricerca sviluppatesi nel corso del Novecento.

Nello specifico, parlare di *possibilità al di là della determinazione* vuol dire, ad esempio, riflettere sulla relazione tra linearità, determinismo e prevedibilità di un sistema meccanico prima e dopo gli studi di Poincaré sul problema newtoniano dei tre corpi, oppure confrontarsi con il fatto che se in fisica classica ciò che si calcola è ciò che si misura, in meccanica quantistica tale coincidenza non è affatto scontata. Più in generale, questo significa cercare un nuovo approccio olistico e multilivello alla realtà fisica nella sua complessità, approfondendo ulteriormente temi che da decenni sono al centro del dibattito scientifico-filosofico contemporaneo: la rottura spontanea di simmetrie in natura, il problema della misura e del ruolo attivo dell'osservatore, le differenti interpretazioni del formalismo quantistico, le correlazioni strutturali, causali e funzionali tra microscopico e macroscopico, il "caos deterministico" e l'autorganizzazione nei sistemi non-lineari, le varie forme di emergentismo e le loro possibili ricadute epistemologiche anche in altri ambiti scientifici.

Oltre ai sistemi classici, la necessità di ripensare la concettualità e gli strumenti della scienza può essere estesa, *mutatis mutandis*, alla meccanica quantistica e alla biologia, le cui forme di indeterminazione, diverse da quella classica, pongono ulteriori problemi a fisici e filosofi. Come si vedrà, mentre in fisica classica l'indeterminazione è legata al problema della misura, nel caso della meccanica quantistica essa è intrinseca alla teoria, vale a dire che una teoria probabilistica non si riferisce direttamente alla realtà, ma caratterizza la probabilità degli stati possibili di un sistema, non tutti passibili di entrare nella realtà. Si pensi al famoso esperimento mentale del "gatto di Schrödinger", e in particolare al fatto che la sovrapposizione degli stati è una possibilità che non deriva dagli elementi del sistema, ma dalla linearità dell'equazione di Schrödinger.

Come sottolinea più volte Heisenberg (2003), è necessario ripensare la relazione tra possibilità e realtà, perché le categorie della fisica classica non sono sufficienti per pensare una teoria probabilistica. Per quanto riguarda la biologia, la situazione di complica, perché a rigore non si possono neppure caratterizzare i possibili attraverso la probabilità in uno spazio delle fasi predeterminato *a priori*, in quanto il vivente è caratterizzato da una storicità contingente che ha poco o nulla a che fare con il "tempo processuale", proprio dell'autorganizzazione fisica. Inoltre, la *possibilità* della variazione (una mutazione, l'apparizione di caratteri fenotipici nuovi ecc.) è qualcosa di *indeterminabile*, ma sempre possibile. In altri termini, il problema *biologico* delle possibilità al di là della determinazione si pone al livello della costituzione del possibile, come evoluzione dello spazio delle fasi in un "tempo storico". Come per l'indeterminazione quantistica, così per quella biologica non esiste ancora un consenso generale rispetto a un'unica prospettiva interpretativa, ma proprio per questo vale la pena esplorare tale questione.

Naturalmente, per ogni tipo di indeterminazione è necessario chiarire il quadro teorico e stabilirne lo statuto gnoseologico. In forma del tutto generale, si può dire che, a differenza di quanto si pensava fino al termine dell'Ottocento, il fatto che per ipotesi si conoscano tutti gli elementi di un sistema non implica che sia sempre possibile prevederne tutti gli stati possibili né la dinamica in generale.

Per questi motivi, l'ordine dei capitoli è stato pensato in maniera da fornire al lettore una scansione storico-teorica delle "possibilità al di là della determinazione" e del rapporto tra possibilità e realtà. In particolare, il primo capitolo (*Determinismo, linearità, prevedibilità. Il problema dei tre corpi da Newton a Poincaré*) si sofferma sul rapporto tra linearità e non-linearità in fisica classica, mostrando la genesi della nozione di "caos deterministico", da una prospettiva storico-epistemologica. Nel secondo capitolo (*Il problema della previsione in un sistema deterministico classico*), la questione dell'indeterminazione legata alle dinamiche caotiche è esplorata da una prospettiva fisico-matematica, focalizzando l'attenzione sugli strumenti per lo studio di questo tipo di fenomeni. Il terzo capitolo (*Ordine e caos nella scienza moderna*) si sofferma sui vari ambiti che interessano le dinamiche non-lineari, chiarendo concetti fondamentali di tale area disciplinare. Con il quarto capitolo (*Come il futuro dipende dal passato e dagli eventi rari nei sistemi viventi*) si entra direttamente nella biologia attraverso un confronto serrato con le dinamiche fisiche e con l'indeterminazione classica e quantistica, allo scopo di individuare uno spazio teorico proprio della biologia. Il quinto capitolo (*Su Turing, gli algoritmi, le macchine, la prevedibilità*) affronta il tema della previsione all'interno dell'ambito logico-matematico e informatico, esplorando le nozioni di calcolabilità, decidibilità e complessità algoritmica. Nel sesto capitolo (*Possibilità e realtà tra fisica e biologia*), di taglio più epistemologico, si riprendono i temi trattati nei capitoli precedenti, sviluppando il problema dell'indeterminazione in fisica classica, nella meccanica quantistica e in biologia, seguendo il filo conduttore del rapporto tra possibilità e realtà.

1

Determinismo, linearità, prevedibilità. Il problema dei tre corpi da Newton a Poincaré

di *Stefano Salvia*

1.1 Genesi e sviluppo di un problema scientifico

Nella sua formulazione più generale, così come la si può trovare oggi in un qualsiasi manuale di fisica, il "problema dei tre corpi" in meccanica classica può essere enunciato nei seguenti termini: note (per via diretta o indiretta) le posizioni r_1, r_2, r_3 rispetto a un determinato sistema di riferimento, le masse m_1, m_2, m_3 e le velocità v_1, v_2, v_3 di tre corpi mutuamente interagenti all'istante iniziale t_0, determinare la legge oraria del moto $r = r(t)$ per ciascuno di essi.

Il sistema costituito dai tre corpi è dunque interamente descritto in linea di principio dal sistema di equazioni orarie che descrivono l'evoluzione temporale delle loro traiettorie, dinamicamente equivalente alla legge oraria ridotta che descrive la traiettoria del loro comune centro di massa. Risolvere il problema generale dei tre corpi (e quindi per estensione degli n corpi, con $n > 2$) significa per la meccanica razionale contemporanea scrivere le equazioni differenziali riconducibili alla $F = ma$ ($F = m \frac{d^2r}{dt^2}$) forma elementare newtoniana che esprimono la dinamica del sistema sulla sola base delle reciproche interazioni gravitazionali tra i suoi elementi, assumendo che il sistema sia isolato, ovvero non scambi né materia né energia con altri sistemi. Questo perché storicamente, come vedremo, il problema dei tre corpi nasce nell'ambito della meccanica celeste e ha essenzialmente a che fare con il comportamento di sistemi come quello Sole-Terra-Luna e con la questione più generale della stabilità del Sistema solare (Diacu, Holmes, 1996).

Trovare la legge oraria $r = r(t)$ equivale allora a risolvere per via *analitica* le equazioni differenziali del moto (almeno del secondo ordine, cioè contenenti derivate seconde della posizione rispetto al tempo) per successive applicazioni del calcolo integrale. Se si riesce a fare questo, è possibile determinare *completamente* l'evoluzione dinamica di un sistema a più corpi a partire dalle condizioni iniziali (posizione e quantità di moto $p = mv$, oppure tempo ed energia cinetica $E = \frac{1}{2} mv^2$) dei suoi elementi: ciò implica a sua volta che il comportamento complessivo del sistema possa essere *ridotto* a quello dei suoi singoli elementi, anche se mutuamente interagenti, ossia che l'evoluzione del sistema possa essere studiata per sovrapposizione *lineare* degli effetti come se i corpi interagissero gravitazionalmente a coppie, cioè come se il problema dei tre corpi fosse traducibile e trattabile come il problema dei *due corpi più una perturbazione*.

In un quadro teorico newtoniano classico è del tutto sensato (anzi auspicabile) procedere in questo modo, immaginando che il sistema possa essere ricostruito per *complicazione* successiva a partire dall'assunto di base 3 corpi = 2 corpi + perturbazione, perché la legge di gravitazione universale ci permette di conoscere con precisione le traiettorie kepleriane (descrivibili da curve coniche: parabole, ellissi o iperboli) di due corpi che si attraggono reciprocamente e che nel caso di orbite chiuse (ellittiche) ruotano intorno al loro comune centro di massa. Sembra dunque naturale pensare che l'unico approccio possibile allo studio di un sistema di *n* corpi mutuamente interagenti sia quello appena descritto: Newton per primo ne era convinto, e come lui lo saranno tutti i principali protagonisti della nostra storia, fino a Poincaré. Per oltre due secoli questo assunto metodologico ed euristico fondamentale guiderà tutti i tentativi di trovare una soluzione analitica generale al problema dei tre corpi, la cui esistenza stessa (prima ancora che unicità) non sembrava minimamente in discussione. A essere in discussione, semmai, erano l'adeguatezza e il grado di avanzamento degli strumenti fisico-matematici con cui si cercava di giungere alla soluzione (Marcolongo, 1919).

1.2
La prima formulazione esplicita del problema

Come abbiamo detto, il problema dei tre corpi nasce storicamente come questione generale di dinamica dei corpi celesti e trova la sua prima espressione compiuta nei *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687, 1713², 1726³) di Isaac Newton (1642-1727) (Guicciardini, 1999). Nel Libro I in particolare (*De motu corporum*), Sezione XI (*De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium*), Proposizione LXVI, e nei relativi ventidue corollari, Newton afferma che se i corpi del Sistema solare si attraessero esclusivamente a coppie, e se quello dotato di massa maggiore nelle rispettive coppie fosse immobile, le orbite descritte sarebbero perfettamente kepleriane:

Se tre corpi, le cui forze descrescono in ragione del quadrato delle distanze, si attirano mutuamente, e le attrazioni acceleratrici di due qualunque verso il terzo sono fra loro inversamente proporzionali al quadrato delle distanze, e i più piccoli ruotano intorno al più grande: dico che il corpo interno descriverà intorno al più interno e massimo, condotti i raggi verso il medesimo, aree più proporzionali ai tempi, e una figura molto più vicina alla forma di un'ellisse avente il fuoco nel punto d'incontro dei raggi, se tale corpo massimo viene mosso da queste attrazioni, che se il corpo massimo o non essendo attratto dai più piccoli giaccia in quiete, o attratto molto meno o molto più, sia mosso o molto meno o molto più (ivi, pp. 316-7).

Nel Libro III (*De mundi systemate*), occupandosi più nello specifico dei moti planetari e in particolare delle irregolarità del moto lunare alla luce delle mutue interazioni del sistema a tre corpi Sole-Terra-Luna, Newton distingue la situazione dei pianeti interni del Sistema solare (Mercurio, Venere, Terra+Luna), di massa trascurabile rispetto al Sole e influenza reciproca trascurabile, con Giove e Saturno relativamente distanti, da quella dei pianeti esterni (Giove e Saturno, a cui dal 1781 si aggiungerà Urano), molto più massivi e con un'influenza reciproca e sul moto di Marte assolutamente non trascurabile.

Poiché le gravità dei pianeti verso il Sole sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze dal centro del Sole, se il Sole fosse in quiete e i pianeti rimanenti non agissero l'uno sull'altro, le loro orbite sarebbero ellittiche, avendo il Sole come fuoco comune, e la descrizione delle aree sarebbe proporzionale ai tempi (ivi, p. 643).

Le orbite dei pianeti interni e quella della Luna intorno alla Terra possono in effetti essere considerate approssimativamente circolari (a bassissima eccentricità) e complanari, per cui il loro comportamento può essere studiato come se ciascuno di essi gravitasse unicamente intorno al Sole, indipendentemente dagli altri. Non a caso il "problema dei tre corpi" in senso stretto (e quello correlato della stabilità o meno del Sistema solare) si focalizzerà in seguito soprattutto sullo studio dei pianeti esterni, in particolare del sistema Marte-Giove-Saturno (Crasta, 1980).

> Poiché i pianeti più vicini al Sole (come Mercurio, Venere, Terra e Marte), a causa della piccolezza dei corpi agiscono l'uno sull'altro ben poco, gli afelii e i nodi di questi sono in quiete, salvo che siano perturbati dalle forze di Giove, di Saturno e dei corpi superiori. Quindi, per la teoria della gravità, se ne può ricavare che gli afelii di questi si muovono alquanto in avanti, rispetto alle stelle fisse, e ciò in ragione della potenza 3/2 delle distanze di questi pianeti dal Sole (Newton, 2008, p. 645).

Newton è consapevole fin dall'inizio delle difficoltà: cerca di ricondurre il problema a quello di *due* corpi interagenti su cui agisce una perturbazione generata da un terzo corpo. Lo stesso enunciato della Proposizione LXVI sopra citato è indicativo di questa scelta. In termini odierni, certamente anacronistici ma che rendono bene l'idea del ragionamento seguito, è come se Newton cercasse di affrontare la situazione per successiva composizione (vettoriale) *lineare* delle forze di attrazione gravitazionale prese a coppie (il "parallelogramma delle forze", che nell'approccio geometrico newtoniano trova una sua prima trattazione formale), per cui la forza risultante finale F che agisce su ciascuno dei tre corpi sarebbe ottenibile per proprietà associativa come segue: $F_1 + F_2 + F_3 = (F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$, dove le due componenti tra parentesi e quella isolata rappresentano di volta in volta rispettivamente i due corpi e la perturbazione; analogamente per tutte le possibili combinazioni, dal momento che la somma vettoriale delle forze non è commutativa.

Risolvere un problema *complicato* in questo orizzonte teorico e metodologico significa infatti analizzarlo in elementi più semplici e poi farli interagire tra loro. Newton ragiona appunto per *complicazione*: se un sistema a tre corpi è riducibile a due corpi più una perturbazione, sarà possibile trattare analogamente un sistema a n corpi. Il banco di prova di questo modo di procedere è rappresentato dalla trattazione del moto lunare, in particolare nel Libro III dei *Principia* (Proposizioni XXV-XXXV), considerata come uno dei maggiori successi della teoria newtoniana. Rendere conto in modo unitario ed esaustivo, in termini sia cinematici che dinamici, dei differenti moti lunari (rotazione intorno al proprio asse, rivoluzione intorno alla Terra, precessione dell'asse di rotazione, precessione degli absidi sul piano orbitale, precessione dello stesso piano orbitale, moto composto di traslazione intorno alla Terra e al Sole) era infatti di primaria importanza per spiegare il fenomeno problematico delle maree e fare *previsioni* accurate sul moto della Luna, al fine di determinare le eclissi lunari e solari e tutte le fasi del ciclo metonico (19 anni solari = 235 mesi lunari) e ottenere una misurazione altrettanto accurata del tempo astronomico per la compilazione del calendario lunisolare, con le conseguenti applicazioni pratiche, a cominciare dalla navigazione.

Newton inizia col considerare il sistema Terra-Luna come costituito da due corpi che orbitano intorno al loro centro di massa attraendosi reciprocamente, mentre è l'influenza del Sole a essere trattata come una perturbazione gravitazionale (assai significativa) generata da un terzo corpo immobile, rispetto al quale la massa degli altri due è trascurabile. Il problema risulta poi ulteriormente semplificato dal fatto che il centro di massa del sistema Terra-Luna si trova all'interno del raggio terrestre, essendo la massa della Luna circa 1/80 di quella della Terra, per cui quest'ultima può a sua volta considerarsi in quiete rispetto alla Luna, il cui moto risulta così ricondotto a quello di una tipica orbita kepleriana intorno alla Terra, sensibilmente "perturbata" dall'influenza del Sole. È assai significativo che nel Libro III, prima di procedere con la dimostrazione delle Proposizioni XXV-XXXV, Newton parta dall'Affermazione (cioè da un enunciato indimostrato, non da una Proposizione) III, in base alla quale: «La forza per effetto della quale la Luna è trattenuta nella propria orbita, tende verso la Terra, ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei luoghi dal centro della stessa» (ivi, p. 623).

Nonostante queste semplificazioni, pur indispensabili per Newton, il moto lunare resta molto complicato da spiegare, soggetto com'è a variazioni di velocità ed eccentricità, a oscillazioni (nutazioni) del suo asse e del piano orbitale e ai fenomeni già menzionati di precessione dell'orbita e degli absidi, che concorrono tra l'altro a spiegare il fenomeno apparente della "librazione" lunare; ovvero il fatto che la Luna durante le sue varie fasi non mostra sempre la stessa porzione di emisfero rispetto a un osservatore sulla Terra, fenomeno scoperto per la prima volta da Galileo. Stabilire la periodicità (e il periodo stesso) di queste variazioni non era impresa semplice, senza contare il problema della natura del moto composto di traslazione della Luna intorno alla Terra e al Sole: oggi sappiamo che è un moto epicicloidale con momento angolare identico a quello del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole, e quindi con la caratteristica peculiare di rivolgere la propria concavità sempre in direzione del Sole medesimo, ma al tempo di Newton tutto questo non era affatto banale e ci si chiedeva se fosse un moto cicloidale o addirittura spiraliforme.

La maggiore difficoltà incontrata da Newton è tuttavia legata alla determinazione della velocità di precessione degli absidi lunari, ossia dei punti di maggiore e minore distanza dalla Terra (detti anche *apogeo* e *perigeo*): rispetto ai dati ricavati dalle osservazioni astronomiche, riesce infatti a calcolare solo la metà dei valori attesi. Nella Proposizione XLV del Libro I, dove si indaga «il moto degli absidi lungo orbite che si approssimano moltissimo ai cerchi» (ivi, p. 281), dopo aver ricavato i suoi risultati Newton afferma, senza ulteriori elementi di giustificazione supportati dalla sua costruzione geometrica, che «l'abside della Luna è più veloce di circa il doppio» di quello della Terra (ivi, p. 288). Lo stesso fa nelle Proposizioni III e IV del Libro III (ivi, pp. 623-9), dove compare un fattore "2" evidentemente ottenuto dai dati osservativi ma che non trova adeguata spiegazione all'interno del suo modello matematico del moto, nonostante Newton imposti con chiarezza la necessità di studiare le perturbazioni per affrontare il problema dei tre corpi, nel caso del sistema Sole-Terra-Luna come in quello ancora più complicato Marte-Giove-Saturno. Newton non riesce a rendere conto di una velocità di precessione degli absidi lunari quasi doppia rispetto a quella da lui calcolata, eppure in linea con le osservazioni astronomiche, tanto che è costretto a prenderne atto e a modificare *ad hoc* i risultati ottenuti (Waff, 1976).

Sarà proprio da questa insormontabile discrepanza tra il calcolo e l'osservazione che prenderà le mosse il "programma di ricerca" della meccanica celeste postnewtoniana nel corso del XVIII e XIX secolo, che metterà espressamente al centro l'obiettivo di giungere a una trattazione *analitica* (mediante gli strumenti del calcolo differenziale e integrale, ossia dell'analisi algebrica), *generale* e *completa* delle perturbazioni e quindi dei sistemi a molti corpi. Quello della completezza della descrizione fisico-matematica sarà infatti un problema chiave per tutto il Settecento e buona parte dell'Ottocento: per determinare (cioè descrivere, spiegare e soprattutto prevedere) interamente il comportamento ad esempio di un sistema a tre corpi relativamente "semplificato" come quello Sole-Terra-Luna, occorrerebbe infatti tenere conto di *tutte* le perturbazioni indotte dagli altri pianeti del Sistema solare, in particolare dai più massivi, Giove e Saturno (e Urano, a cui si aggiungerà nel 1846 la scoperta di Nettuno), e chiedersi al contempo se e in che misura queste perturbazioni alterino la forma "pura" della legge di gravitazione universale formulata da Newton. Se quest'ultima è indiscutibilmente valida per due corpi che si attraggono reciprocamente con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza, il passaggio a molti corpi potrebbe implicare diverse possibilità di modifica della legge di gravitazione: sarà l'oggetto di una delle dispute più accese della fisica matematica del Settecento.

1.3
Dalla geometria analitica all'analisi algebrica

Nel corso del XVIII secolo ci si riferisce costantemente ai *Principia* come a un'opera dall'indiscusso valore fondativo, un modello di razionalità scientifica e soprattutto un "programma di ricerca" fisico-matematico-filosofico da estendere e implementare (Guicciardini, 1996). Tuttavia il modello *geometrico* newtoniano, incentrato sulla dimostrazione di proposizioni per mezzo di costruzioni in cui si ha un'interpretazione *meccanica*, cinematico-dinamica delle curve generate da punti materiali in moto, rispondeva a una concezione tradizionale dell'applicazione della matematica a problemi fisici, che Newton consapevolmente ricollegava all'approccio antico, in particolare di Archimede, Apollonio, dei matematici alessandrini (Erone, Filone, lo stesso Euclide) e di Pappo. «La geometria dunque si fonda sulla prassi della meccanica, e non è nient'altro che quella parte della meccanica universale che propone e dimostra l'arte di misurare accuratissimamente» (Newton, 2008, p. 58).

Da questo punto di vista Newton si sentiva molto più vicino a Galileo e alla scuola galileiana (e allo sviluppo della *geometria degli indivisibili* che l'aveva caratterizzata) che non a René Descartes (1596-1650) e alla sua *geometria analitica* (o *algebrica*), a sua volta fortemente debitrice degli sviluppi moderni dell'algebra simbolica di François Viète (1540-1603) e John Wallis (1616-1703). Pur avendo contribuito in modo determinante insieme a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) allo sviluppo del calcolo infinitesimale (o "delle flussioni", così definite da Newton perché studiavano i rapporti incrementali infinitesimi di quantità "fluenti" rispetto al tempo) e alla dimostrazione della complementarità tra calcolo infinitesimale e calcolo integrale, Newton considerava il "metodo delle flussioni" un utile e potente strumento *analitico* ed *euristico* per l'approccio ai problemi, ma dava assoluta centralità al momento *sintetico* e *sistematico* della ricostruzione per via geometrica dei risultati ottenuti, secondo il modello antico (Pala, 1969; Mamiani, 1990).

Nel corso della prima metà del Settecento, soprattutto nel continente europeo, si assiste invece all'abbandono dell'approccio geometrico a favore di una rapida assimilazione e affermazione del calcolo infinitesimale e integrale (nella sua versione leibniziana in particolare), che viene agevolmente recepito da un *milieu* fisico-matematico e filosofico favorevole agli sviluppi della geometria analitica di Descartes e in questo senso del tutto trasversale alle controversie teoriche che vedono opporsi a vario titolo cartesiani, newtoniani e leibniziani, ben rappresentato da matematici (e non solo) come Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) e Jean-Baptiste d'Alembert (1717-1783) (Boyer, 2007).

Per gli scienziati-filosofi che molto presto si definiranno "newtoniani" (pur con diverse accezioni e sfumature), e che faranno del "newtonianesimo" in chiave *meccanicista* e *riduzionista* (ma non necessariamente materialista) molto più di un semplice programma di ricerca, il calcolo non si limita a essere uno strumento analitico ed euristico, per quanto efficace, ma diventa lo strumento principale con cui interrogare i fenomeni naturali e cercare di leggerli, descriverli e spiegarli. Di più: diventa il linguaggio stesso della natura, e non solo il linguaggio della fisica matematica, che in quest'ottica diviene in grado di studiare e comprendere un fenomeno se e solo se è in grado di leggerne in trasparenza (a meno di fattori di disturbo da rimuovere o di complicazioni da semplificare) la struttura, la "grammatica" analitico-algebrica (Cohen, 1982).

Se Galileo aveva affermato nel *Saggiatore* (1623) che il «grandissimo libro» dell'Universo «è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola» (Galilei, 2005, p. 631), ora è il calcolo ad assumere il ruolo centrale nella decodifica del "libro della natura" che Newton ancora attribuiva alla costruzione geometrica. Si rovescia così completamente il rapporto tra *analisi algebrica* e *geometria*: sono i ragionamenti fisico-geometrici particolari a fornire strumenti euristici per impostare analiticamente i problemi a livello generale e astratto, sono le costruzioni geometriche a diventare funzionali e a dare "significato fisico" alle operazioni puramente simbolico-formali del calcolo (Álvarez Jiménez, 2001; Israel, 2001; Panza, 2001).

A fronte di divergenze anche sostanziali e profonde sul piano filosofico e persino metafisico, gli ambienti fisico-matematici newtoniani e leibniziani (in senso lato) recepiscono il calcolo come ulteriore sviluppo e perfezionamento della geometria analitica cartesiana nel senso della *generalità* (al limite *universalità*) e dell'*astrazione*. Da un punto di vista metodologico (e presto anche ontologico) entrambe le correnti si contrappongono in senso razionalista allo sperimentalismo "baconiano" propugnato dalla Royal Society: osservazione guidata dalla teoria ed esperimento riproducibile (in ambiti diversi da quelli della fisica celeste) sono momenti certamente imprescindibili del "fare scienza", ma hanno senso solo se il punto di partenza e di arrivo del lavoro di ricerca è la traduzione integrale di un fenomeno nel linguaggio del calcolo.

Descrivere, spiegare e comprendere *scientificamente* un problema diventa perciò equivalente a scrivere e risolvere il sistema di *equazioni differenziali* che rende conto in forma analitica ed esaustiva dei suoi *elementi* essenziali e costitutivi, una volta che siano stati *isolati* da quelli accidentali e/o di carattere perturbativo e fatti interagire tra loro per sovrapposizione *lineare* degli effetti e quindi per successive complicazioni; nell'ipotesi fondamentale che ciò sia sempre possibile, anzi indispensabile e necessario, e non solo altamente desiderabile.

Per un fisico matematico del Sette-Ottocento, in particolare dopo la "grande sintesi" rappresentata dalla *meccanica analitica* lagrangiana (su cui torneremo più avanti), determinare il comportamento (ossia la legge oraria, in termini attuali) di un sistema fisico significherà dunque, in maniera sempre più normativa e prescrittiva: 1. scegliere il sistema di riferimento e di coordinate più opportuno per descriverlo; 2. analizzarlo in elementi/problemi più semplici e procedere poi per complicazioni successive; 3. individuare il centro di massa del sistema e le sue costanti meccaniche (quantità di moto, momento angolare, energia potenziale + energia cinetica); 4. ridurre dove e quando possibile i gradi di libertà del sistema, cioè il numero di variabili da considerare, e quindi l'ordine e il grado dei sistemi di equazioni differenziali da risolvere.

Risolvere un sistema di equazioni differenziali (*ordinarie*) significherà a sua volta: 1. partire dalla descrizione dinamica del sistema (masse, forze in gioco, costanti meccaniche); 2. impostare ciascuna equazione avendo come riferimento canonico il secondo principio newtoniano $F = ma$, dove l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio percorso rispetto al tempo; 3. integrare le equazioni in base al loro ordine (ossia l'ordine massimo dei termini differenziali in esse contenuti); 4. sostituire opportunamente le funzioni primitive che sono soluzioni di ciascuna equazione nel sistema generale di equazioni; 5. risalire dalla dinamica alla cinematica, ovvero dalle masse e accelerazioni in gioco alle velocità e agli spostamenti (leggi orarie) dei vari elementi del sistema fisico; 6. pervenire all'espressione analitica generale della legge oraria del sistema.

Una volta note le condizioni iniziali (posizione e quantità di moto o in alternativa tempo ed energia meccanica), deve essere possibile *prevedere istante per istante* le traiettorie di ogni elemento del sistema in base alla sua legge oraria, che si suppone *invariante e simmetrica per inversione temporale*, ovvero perfettamente *reversibile*. Condizioni iniziali diverse implicheranno evoluzioni diverse del sistema, ma tutte ugualmente prevedibili in modo rigorosamente deterministico a partire dall'espressione analitica della legge oraria, e tali per cui condizioni iniziali che differiscano per valori infinitesimali determineranno traiettorie molto simili, al limite identiche. Come vedremo, questo significa assumere che *determinismo e prevedibilità* siano due nozioni perfettamente sovrapponibili e coestensive, e che qualsiasi difficoltà nel ricondurre un fenomeno alla "concettualità chiusa" e alla "dinamicità chiusa del possibile" sopra descritta debba essere attribuita a un "rumore di fondo" inessenziale ancora non del tutto eliminato e/o a fenomeni secondari a carattere perturbativo da ricondurre nell'alveo della trattazione analitico-algebrica (Marinucci, 2011).

Il celebre "demone" (o dio) immaginato dal matematico, fisico, astronomo, filosofo e politico Pierre-Simon Laplace (1749-1827), uno dei principali protagonisti degli sviluppi sette-ottocenteschi del calcolo applicato alla meccanica, è l'emblema stesso di questo modo di pensare: conoscendo in maniera assolutamente perspicua (chiara e distinta, avrebbe detto Descartes) e istante per istante lo stato di *qualsiasi* particella materiale di un cosmo interamente risolvibile in *materia* e *movimento*, il "demone" può conoscerne (cioè *calcolare* e quindi *determinare*) contemporaneamente tutti gli stati *passati* e *futuri*, virtualmente estesi all'infinito nel tempo in un Universo-meccanismo che si presume (più o meno apertamente e a dispetto della teologia naturale newtoniana) increato ed eterno, non necessariamente bisognoso di un "Architetto" o di un "Orologiaio" per funzionare (Bellone, 1979). Scrive Laplace in alcuni tra i passi più famosi del suo *Essai philosophique sur les probabilités* (1814):

Tutti gli avvenimenti, anche quelli che per la loro piccolezza sembrano non ubbidire alle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza necessaria come lo sono le rivoluzioni del sole. [...] Gli avvenimenti attuali hanno coi precedenti un legame fondato sul principio evidente che nulla può incominciare a essere senza una causa che lo produca. Questo assioma, noto sotto il nome di principio della ragion sufficiente, si estende anche alle azioni che giudichiamo indifferenti (Laplace, 1967a, p. 242).

Possiamo pensare l'attuale stato dell'universo come una conseguenza del suo passato e causa del suo futuro. Un'Intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze di cui è animata la natura e la posizione di tutti gli oggetti che esistono, e se tale intelletto fosse anche in grado di elaborare una quantità così grande di dati, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi (ivi, p. 243).

Il più delle volte i fenomeni della natura sono complicati da cause estranee: un numero enorme di cause perturbatrici vi mescolano la loro influenza, tanto che è ben difficile riconoscerli. Per giungervi bisogna moltiplicare le osservazioni o gli esperimenti, affinché, venendosi a distruggere mutualmente gli effetti estranei, i risultati medi mettano in evidenza i fenomeni ed i loro vari elementi (ivi, pp. 298-9).

Ogni osservazione ha per espressione analitica una funzione degli elementi che si vogliono determinare; e, se essi sono press'a poco noti, la funzione diventa una funzione lineare delle loro correzioni. Uguagliandola all'osservazione stessa, si forma un'equazione di condizione. Se si hanno molte equazioni del genere, le si combina in modo da ottenere tante equazioni finali quanti sono gli elementi, di cui si determinano poi le correzioni, risolvendo equazioni (ivi, p. 300).

Ciò si riflette immediatamente nella considerazione, sul piano epistemologico, che Laplace ha dell'impiego sia del *calcolo delle probabilità* (che lui per primo ha contribuito a elaborare e sistematizzare) sia dei diversi *metodi di approssimazione* basati sulle *derivate parziali* di equazioni a più variabili o sullo sviluppo in *serie di potenze* delle funzioni analitiche e periodiche, che proprio nel corso del XVIII e XIX secolo conosceranno importantissimi sviluppi (per lo più stimolati da problemi meccanici come appunto quello dei tre corpi), dai primi studi di Brook Taylor (1685-1731) ai lavori di Bernoulli, Euler, d'Alembert, lo stesso Laplace, Lagrange e Joseph Fourier (1768-1830) (Dessì, 1982; Morando, 1995): per quanto strumenti utilissimi nella pratica quotidiana dei fisici matematici, si tratta per Laplace di approcci *parziali* e *incompleti* alla conoscenza della natura, che riflettono o la nostra ignoranza epistemica, o la nostra incapacità di isolare correttamente i fenomeni dalle cause "estranee" e "perturbatrici", o ancora l'insufficienza degli strumenti matematici di cui disponiamo (Laplace, 1967b; 1967c).

Da quanto detto finora si evince chiaramente come e perché un problema chiave della meccanica celeste tra Settecento e Ottocento, quello dei tre corpi, sarà invariabilmente affrontato fino al termine del XIX secolo come un problema di cui, a meno di soluzioni analitiche particolari che di volta in volta potevano essere trovate e studiate, *doveva* esistere una soluzione analitica generale, della quale le differenti soluzioni particolari rappresentassero casi specifici ottenibili per riduzione di uno o più gradi di libertà del sistema. La stessa (presunta) stabilità del Sistema solare, insieme con l'apparente omogeneità, isotropia e stazionarietà del cielo delle "stelle fisse", sembravano infatti il necessario correlato fisico osservabile dell'esistenza matematica di una tale soluzione generale.

1.4
La controversia intorno a $\frac{1}{r^2}$

Nelle sue *Réflexions sur le problème des trois corps* (1761) (d'Alembert, 1822), d'Alembert attesta che l'uso dell'espressione "problème des trois corps" risale al 1747, anno in cui sia lui che Clairaut sottoposero le loro prime memorie all'Accademia delle Scienze di Parigi sul moto del sistema Sole-Terra-Luna. Proprio verso la metà del Settecento il dibattito intorno al problema si fa particolarmente acceso e inseparabile dalle questioni correlate della stabilità del Sistema solare e della stessa "natura" e forma della legge di gravitazione universale.

Ad aprire un'intensa stagione di studi e controversie sull'argomento è la memoria di Euler *De causa gravitatis* del 1743 (a neppure venti anni di distanza dalla terza e ultima edizione ampliata e riveduta dei *Principia* di Newton), apparsa in una raccolta miscellanea dell'Accademia delle Scienze di Berlino (Euler, 1743). Nel suo breve ma affascinante trattato, che ha una ricezione scarsa al di fuori della Germania e lascia decisamente freddi i colleghi francesi e inglesi, che non lo citano per nulla pur avendolo sicuramente letto, Euler cerca di giungere a un'efficace sintesi tra teoria newtoniana della gravitazione e teoria cartesiana dei "vortici d'etere" per spiegare dinamicamente il prodursi dell'attrazione gravitazionale tra due masse senza il ricorso a improbabili "azioni a distanza" (Aiton, 1995).

Euler immagina (ingegnosamente) che non siano i corpi materiali, come pensava Descartes, a "produrre/indurre" il moto vorticoso dell'etere (ripensato in chiave corpuscolarista come un fluido onnipervasivo e perfettamente elastico costituito da atomi elementari sferici indifferenziati, responsabile della propagazione ondulatoria della luce e di tutti i fenomeni connessi al calore, al magnetismo e all'elettricità), bensì che l'etere riempia uniformemente lo spazio vuoto e si muova incessantemente in tutte le direzioni di per sé, a prescindere dal fatto che vi siano "immersi" o meno dei corpi materiali (è possibile che Euler avesse in mente il moto browniano delle particelle di polvere attraverso l'aria, che peraltro aveva già ispirato l'antica teoria atomista del *clinamen*). La presenza di una massa relativamente grande tuttavia ne altererebbe la fluidodinamica, creando un gradiente sferico di concentrazione e pressione che avrebbe valore massimo a grande distanza dal corpo e minimo alla sua superficie. Euler dimostra in modo molto interessante e originale (per quanto non esente da difficoltà insormontabili, comuni a tutte le "teorie dell'etere" che cercavano di spiegare dinamicamente la gravità) che, per effetto del gradiente sferico di concentrazione e pressione dell'etere intorno alla massa, tutti i corpi circostanti (pensati *ad hoc* di massa molto più piccola) siano "spinti" verso la massa maggiore (anziché "attratti" da questa) con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale a r^2.

Il *De causa gravitatis* non si inserisce direttamente nel dibattito sul problema dei tre corpi e non affronta il tema delle perturbazioni dovute alla presenza di almeno tre corpi reciprocamente interagenti, ma costituisce lo sfondo ipotetico dei due principali lavori di Euler sui tre corpi e sulla stabilità del Sistema solare: le *Recherches sur le mouvement des corps célestes en général* (1747) (Euler, 1960a) e le *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* (1748) (Euler, 1960b), entrambe invece attentamente recepite e discusse da Clairaut e d'Alembert.

Euler cerca di fissare alcune possibili vie da percorrere per giungere a una soluzione generale del problema dei tre corpi, procedendo come Newton per complicazioni successive a partire dall'ipotesi-guida fondamentale: 3 corpi = 2 corpi + perturbazione. Inizialmente suppone che le orbite di Giove e Saturno siano prive di eccentricità e complanari (come quelle dei pianeti interni e del sistema Sole-Terra-Luna) e ne deduce una serie di irregolarità che tratta come perturbazioni. Quindi, mantenendo l'orbita di Giove circolare, passa a considerare l'eccentricità di Saturno, traendone nuove irregolarità diverse dalle precedenti e più vicine a quelle effettivamente osservate. Il passo successivo consiste nel considerare l'eccentricità di Giove e l'inclinazione delle orbite dei due pianeti, allo scopo di "convergere" nella trattazione delle perturbazioni con le irregolarità note dai dati osservativi. Ciò nonostante, Euler non riesce a giungere attraverso lo studio del sistema Sole-Giove-Saturno a una soluzione generale del problema dei tre corpi ed è costretto a formulare una serie di opzioni di ricerca per spiegare le irregolarità, riassumibili come segue.

1. La distribuzione della materia e la forma di uno o più pianeti non è omogenea, per cui la forza gravitazionale non è propriamente diretta verso il loro centro.
2. La forza di gravità non segue esattamente $\frac{1}{r^2}$ (in assoluto o solo in presenza di grandi masse che si attraggono reciprocamente?); il termine newtoniano va corretto (in generale o solo in prossimità delle masse interagenti, in modo che a sufficiente distanza l'espressione torni a essere approssimabile a $\frac{1}{r^2}$? Nel senso di una forza mono-termine o multi-termine?).
3. Accanto alla forza di gravità, che segue $\frac{1}{r^2}$, interviene almeno un'altra forza di diversa natura (magnetica? Oppure legata alla fluidodinamica dell'etere circostante?) che perturba la relazione newtoniana.

Euler inizialmente propende per la seconda opzione, anche se questa come abbiamo visto implica a sua volta diverse alternative possibili. In particolare Euler osserva che $\frac{1}{r^2}$ funziona idealmente quando si ha a che fare con orbite kepleriane e masse sferiche omogenee. I pianeti tuttavia (specialmente i giganti gassosi come Giove e Saturno) sono lontani dal possedere queste caratteristiche ideali, di conseguenza bisogna rivedere $\frac{1}{r^2}$.

I due contributi di Euler sono molto importanti, perché riassumono le opzioni fondamentali intorno alle quali si svolgerà l'intero dibattito sui tre corpi e su $\frac{1}{r^2}$ nel corso del Settecento. Da un lato "istituzionalizzano" la strategia newtoniana di affrontare i tre corpi come il problema di due corpi e una perturbazione; dall'altro inaugurano un approccio matematico innovativo, che una volta impostato il problema in termini di equazioni differenziali (come vedremo né ordinarie né tantomeno lineari) non tenta più la via dell'integrazione diretta, presto rivelatasi impossibile (o, come si pensava allora, inaccessibile allo stadio di avanzamento del calcolo integrale raggiunto all'epoca), ma cerca di individuare la soluzione per approssimazioni successive di funzioni attraverso lo studio della convergenza o meno di serie di potenze. Esattamente il tipo di approccio "incompleto" e "approssimato" che per Laplace sarebbe stato alcuni decenni più tardi il segno inequivocabile dell'inadeguatezza delle nostre conoscenze e/o della nostra matematica ad affrontare il problema dei tre corpi dal punto di vista del suo "demone" (Fraser, 2001).

Le tre opzioni risolutive tracciate da Euler sono individuate e condivise anche dagli altri matematici a lui contemporanei, pur non condividendo necessariamente la scelta di mettere in discussione $\frac{1}{r^2}$. d'Alembert, in particolare, è tra coloro che ritengono di dover mantenere $\frac{1}{r^2}$ come la soluzione più semplice ed elegante, e quindi (un passaggio logico per nulla banale) quella più conforme alla natura. Semmai alla gravitazione universale andrebbe affiancata un'altra forza perturbatrice, di natura magnetica (d'Alembert ipotizza che il Sole e tutti i pianeti, come la Terra, abbiano un campo magnetico per il solo fatto di ruotare intorno al proprio asse), in grado di spiegare le discrepanze tra i calcoli matematici e le osservazioni astronomiche. A differenza di Euler e Clairaut, che ritengono di dover modificare $\frac{1}{r^2}$, attribuendo dunque al problema dei tre corpi un significato generale per la stessa teoria della gravitazione, d'Alembert nel mantenere valido $\frac{1}{r^2}$ ritiene invece che quello dei tre corpi sia un problema essenzialmente locale, che emerge in casi particolari come quello di sistemi planetari con grandi masse che generano altrettanto intensi campi magnetici, senza dover mettere in discussione la legge newtoniana della gravitazione universale (d'Alembert, 1758).

Clairaut al contrario è in sintonia con l'idea di Euler: per lui il problema dei tre corpi non può essere ridotto a un problema locale, bensì si tratta di una difficoltà generale che implica la necessità di rivedere $\frac{1}{r^2}$, come sostiene nella sua *Dissertation du système du monde dans les principes de la gravitation universelle* (1745) (Clairaut, 1745). Non si trattava certamente di un'operazione semplice, perché da un lato stava l'enorme potere esplicativo e predittivo della teoria newtoniana, dall'altro vi erano le oggettive discrepanze tra risultati matematici e dati astronomici. Nell'ottica di Clairaut il risultato newtoniano non va sconfessato ma ampliato per rendere conto in maniera completa ed esaustiva dei fenomeni perturbativi. Affermando senza poterlo dimostrare che il moto dell'abside lunare è quasi doppio rispetto al valore ottenuto dai calcoli, Newton nel Libro III dei *Principia* avrebbe di fatto ammesso di non essere in grado di trattare adeguatamente le perturbazioni. Nel caso specifico del sistema Sole-Terra-Luna ne considera solo una (quella del Sole) e considera soltanto orbite che possono essere approssimate a un cerchio.

L'idea di Clairaut è pertanto quella di integrare, non di stravolgere la forma "pura" della legge newtoniana, inserendo un secondo termine accanto a $\frac{1}{r^2}$ in modo che i suoi effetti siano sensibili a distanze relativamente ravvicinate e trascurabili sulle grandi distanze, per le quali $\frac{1}{r^2}$ funziona benissimo. In via del tutto ipotetica, Clairaut pensa in un primo momento di affiancare a $\frac{1}{r^2}$ il termine $\frac{1}{r^4}$, allo scopo di rendere conto delle perturbazioni sulle brevi distanze preservando al contempo i risultati ottenuti con il solo $\frac{1}{r^2}$ e mantenendo un'unica legge di gravità per i fenomeni celesti (come i moti planetari) e terrestri (come la capillarità), sia pur multitermine. In questo modo le stesse perturbazioni cesserebbero di essere considerate tali e sarebbero ricondotte a fenomeni *predicibili* nell'ambito di una teoria unitaria e comunque newtoniana della gravitazione.

Contro la proposta di Clairaut si scaglia duramente il naturalista, matematico e cosmologo Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon (1707-1788). Questi, nelle sue *Réflexions sur la loi de l'attraction* (1745) (Buffon, 1745), solleva obiezioni che Clairaut non esita a definire di principio e "metafisiche", estranee a considerazioni strettamente fisico-matematiche attinenti al problema dei tre corpi. Clairaut fa riferimento alla necessità di un'estensione conservativa di $\frac{1}{r^2}$ che assicuri una maggiore *unità* e *completezza* della conoscenza dei fenomeni gravitazionali kepleriani e non-kepleriani (perturbativi). Buffon invece ritiene di primaria importanza l'assunto per cui, essendo la natura *semplice*, lo devono essere anche le sue leggi (Hanks, 1966). Secondo Buffon una legge di natura (a maggior ragione quella di gravitazione universale) deve essere espressa da un unico termine, altrimenti verrebbero meno la sua *unità* e *semplicità*, entrambe caratteristiche fondamentali di una legge naturale. Buffon si spinge oltre (come non manca di fargli notare polemicamente Clairaut), assumendo che a ogni termine di un'espressione matematica debba corrispondere una sola forza: in questo caso sarebbe assurdo che a una stessa forza corrispondessero due termini distinti, $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r^4}$. Per Buffon $\frac{1}{r^2}$ è immodificabile, riducendo il problema dei tre corpi a un problema locale (analogamente a d'Alembert) e accusando Clairaut di voler elevare una difficoltà, per quanto importante, a principio e legge universale.

La disputa Clairaut-Buffon, aspra più a causa dei toni con cui viene condotta che dei suoi contenuti (peraltro rivelatori di come a metà Settecento si concepisca il rapporto tra *matematica* e *natura*, tra *determinismo* e *prevedibilità*), si conclude in ogni caso a favore dell'espressione newtoniana $\frac{1}{r^2}$ grazie a nuovi calcoli effettuati dallo stesso Clairaut tra il 1748 e il 1749. In un'ultima coda polemica, Clairaut tiene a precisare per l'occasione che le obiezioni sollevate da Buffon non gli sono state di alcun aiuto, che la validità di $\frac{1}{r^2}$ è stata accertata per via puramente fisico-matematica, senza fare appello a considerazioni non pertinenti, e che ha ritenuto di dover tenere testa a Buffon per via delle sue concezioni filosofiche di fondo, fuorvianti e discutibili.

Al di là della polemica il risultato di Clairaut è di importanza fondamentale, non meno di quello raggiunto nel 1743 insieme a Pierre-Louis Maupertuis (1698-1759) con la *Théorie de la figure de la Terre*, dove, in base alla meccanica e alla legge di gravitazione newtoniana e mediante un'accurata misurazione geodetica della lunghezza di un grado di meridiano, si dimostra che la Terra (e più in generale qualsiasi pianeta) non è una sfera ma un ellissoide di rivoluzione schiacciato ai poli (Clairaut, 1808; Chapin, 1995). In una lettera a Clairaut del 29 giugno 1751, Euler ribadisce che $\frac{1}{r^2}$ è stato finalmente e saldamente stabilito: una conferma importante, perché da essa, afferma Euler, "dipende l'intera teoria astronomica". Nel 1765 Clairaut pubblicherà (significativamente) una *Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances* (Clairaut, 1765).

Da un punto di vista generale, con i risultati di Euler e Clairaut (l'ipotesi di d'Alembert, intorno a una forza magnetica che si affiancherebbe a quella gravitazionale nel determinare le perturbazioni dei moti planetari, viene progressivamente accantonata) si stabiliscono in via definitiva i termini del problema dei tre corpi e il metodo matematico con cui verrà affrontato sostanzialmente fino a Poincaré: 1. ricondurre i tre corpi a due corpi e una perturbazione (in ambito strettamente gravitazionale), reiterando l'operazione per sovrapposizione lineare e complicazioni successive; 2. scrivere le equazioni differenziali (generalmente *non integrabili*) che esprimono la dinamica del sistema e cercare di risolverle per approssimazioni successive mediante sviluppo in serie di potenze che si suppongono essere *convergenti*; 3. individuare soluzioni speciali ed eventuali periodicità (riducendo i gradi di libertà del sistema), cercando *equilibri* dove possibile.

1.5
Il problema dei tre corpi ristretto

È su queste basi che lo stesso Euler si muove, anche dopo i risultati di Clairaut, per studiare particolari configurazioni del problema dei tre corpi allo scopo di avvicinarsi progressivamente, per approssimazioni e complicazioni successive, a una trattazione generale. La questione coinvolge presto anche lo studio delle traiettorie (ellittiche, paraboliche o iperboliche) delle comete, in particolare della cometa di Halley: il suo ritorno dopo il 1682, previsto per il 1757, risulta ritardato di 618 giorni a causa delle perturbazioni generate dall'attrazione gravitazione di Giove e Saturno. Dopo la semplificazione newtoniana del sistema Sole-Terra-Luna, Euler propone nel 1760 una versione *ristretta* non banale del problema, risolvibile per via *analitica* a determinate condizioni (sono gli stessi anni peraltro in cui lavora alle serie *divergenti*, non meno significativamente).

Il sistema speciale a tre corpi di Euler è costituito infatti da due corpi di massa non trascurabile che orbitano intorno al loro comune centro di massa lungo traiettorie con eccentricità nulla, ossia perfettamente circolari. Un terzo corpo di massa trascurabile orbita alternativamente intorno alle due masse maggiori, lungo traiettorie *aperte* che in casi particolari possono risultare *periodiche*. L'eccentricità nulla di m_1 e m_2 e la trascurabilità di m_3 sono requisiti essenziali per ridurre i gradi di libertà del sistema e assicurarne così la *stabilità*. Entrambi i vincoli sono piuttosto improbabili da un punto di vista fisico (soprattutto il primo), ma il sistema viene sviluppato (letteralmente a tavolino) da Euler per risolvere il "problema dei due centri" di Kepler e studiare l'interazione fra comete o satelliti e pianeti massivi, come Giove e Saturno. Euler giunge a una soluzione analitica generale mediante *integrali ellittici* (chiusi), un nuovo strumento del calcolo integrale da lui sviluppato e che sembrava confermare l'opinione diffusa (ripresa ancora da Auguste Comte nel primo volume del suo *Cours de philosophie positive* del

1830-42) circa la "minore perfezione" e "incompletezza" del calcolo integrale rispetto a quello differenziale, anche nell'affrontare il problema dei tre corpi (Comte, 1830).

Nei decenni successivi verranno sviluppate versioni più restrittive del sistema di Euler, sia da parte di Euler stesso che di altri fisici matematici (tra cui Lagrange), tutte caratterizzate dall'essere *stabili*, dotate di *periodicità chiuse* e di *punti di equilibrio*, oltre a essere *trattabili analiticamente*. Tre possibili varianti, a titolo d'esempio, sono:

1. $m_1 = m_2$, con m_1 e m_2 complanari;
2. $m_1 = m_2$, con m_1 e m_2 complanari e iso-orbitali (cioè si muovono lungo la stessa orbita);
3. $m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 4 : 5$ e con posizioni e velocità iniziali predefinite.

Si tenteranno anche generalizzazioni a partire dai casi particolari del problema ristretto dei tre corpi, ma per garantire la stabilità, la periodicità, l'esistenza di punti di equilibrio e la trattabilità del sistema per via analitica sarà necessario introdurre *ad hoc* forze gravitazionali ausiliarie (o pseudo-gravitazionali) direttamente proporzionali a $\frac{1}{r}$ e a $\frac{1}{r^3}$, il cui unico "significato fisico" plausibile sarà quello di rendere localmente trattabili le perturbazioni.

1.6
Il Sistema solare è stabile?

Nel corso del Settecento, mentre si intensificano i lavori di meccanica celeste sulle versioni ristrette del problema dei tre corpi, passibili come abbiamo visto di soluzioni analitiche che garantiscono la stabilità del sistema oggetto di studio, la presenza di traiettorie chiuse periodiche e l'individuazione di punti di equilibrio gravitazionale, ci si interroga su una questione più generale non meno importante e direttamente connessa ai tre corpi: il nostro Sistema solare nel suo complesso, inclusi i moti cometari, è stabile? Se sì, in che misura? È *assolutamente* stabile (per cui rappresenta nel suo insieme un caso particolare di problema a molti corpi ristretto), a meno di perturbazioni impreviste dallo spazio interstellare esterno (un corpo celeste estraneo al sistema che dovesse a un certo punto aggiungersi ai pianeti o urtarne uno alternandone l'orbita), o è solo *relativamente* stabile, su tempi abbastanza lunghi da darci l'impressione di una sua stabilità?

La questione evidentemente non era di poco conto, già solo dal punto di vista fisico-matematico e astronomico (per non parlare di quello filosofico e persino teologico), perché tutte le osservazioni, i calcoli, le previsioni e i modelli dei moti planetari che avevano tradizionalmente costituito il patrimonio plurimillenario dell'astronomia e più recentemente della fisica celeste postnewtoniana si erano sempre fondati su un assunto fino ad allora ritenuto indiscutibile: che il Sole, la Terra, la Luna e tutti gli altri pianeti, fino a includere le stesse "stelle fisse", costituissero un *cosmo* ordinato (come quello kepleriano), retto da leggi invariabili e dotato di regolarità periodiche, tali da rappresentare un riferimento sicuro per la misura del *tempo astronomico* e di conseguenza per qualsiasi altra misura del tempo da esso derivata. Se l'astronomia (inseparabile dalla matematica) era la scienza esatta più antica sviluppata dall'umanità e perciò la più avanzata, al punto da costituire come meccanica celeste un *modello di scientificità* per tutte le altre branche del sapere, il dubbio che il Sistema solare (l'unico effettivamente noto, e lo resterà fino al XX secolo) potesse in realtà essere *instabile* in linea di principio era qualcosa di dirompente, letteralmente destabilizzante.

Nella seconda metà del Settecento in particolare si cerca di estendere lo studio del problema dei tre corpi al problema della stabilità del Sistema solare, procedendo sia per variazioni e complicazioni dei casi speciali noti di stabilità e periodicità, sia per approssimazioni successive nel tentativo di trovare soluzioni parziali a sistemi di equazioni differenziali non integrabili (o meglio, *non ancora* integrabili, secondo la sensibilità dell'epoca) mediante lo sviluppo in serie di potenze delle funzioni e lo studio della loro presunta convergenza.

Proprio su questa "presunzione generale di convergenza" all'infinito delle serie di potenze impiegate nell'approssimare le soluzioni analitiche ai sistemi di equazioni differenziali che descrivono il comportamento di più pianeti in orbita intorno al Sole si addensano i primi dubbi, che vengono espressi in particolare dal matematico, fisico, astronomo e filosofo "leibniziano" Johann Heinrich Lambert (1728-1777), amico e corrispondente di Euler: una figura estremamente interessante sotto molti punti di vista. È peraltro tra i pochissimi a proseguire dopo il 1750 nel solco del "programma di ricerca" tracciato da Euler nel già citato *De causa gravitatis*, nel quadro di una teoria *relazionale* delle grandezze fisiche fondamentali (spazio, tempo, massa) e di una concezione "monadologica" (di matrice wolffiana) delle particelle elementari d'etere come "centri di forza", unità basilari di massa/inerzia/azione/energia e costituenti primari di tutta la materia, secondo una tradizione corpuscolarista risalente al matematico, naturalista e filosofo tedesco Joachim Jungius (1587-1657), apprezzato e citato dallo stesso Leibniz.

Lambert lavora al problema ristretto e generale dei tre corpi e alla stabilità del Sistema solare, in una serie di memorie e trattati tra il 1761 e il 1773, inaugurata dalle sue *Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues* (1761) (Lambert, 2006), dove anticipa in maniera quasi indipendente molte delle considerazioni sulla probabile dinamica delle origini del Sistema solare, a partire da una nebulosa primordiale evolutasi in disco di accrescimento a seguito della nascita del Sole fino alla formazione dei pianeti e alla loro stabilizzazione nelle attuali orbite, che un paio di decenni più tardi diventerà famosa come "ipotesi di Kant-Laplace". Ma è soprattutto nella memoria *Solution générale et absolue du problème des trois corps moyennant des suites infinies* (1767) (Lambert, 1767), presentata all'Accademia delle Scienze di Berlino (anche in questo caso con scarsa ricezione da parte dei contemporanei, ad eccezione del solo Euler), che Lambert mette a fuoco per la prima volta in modo esplicito il problema della *non convergenza* in generale delle serie infinite di potenze, se non in casi particolari che (sembra lasciare intendere) corrispondono proprio ai casi di problema ristretto dei tre corpi per cui è possibile trovare una soluzione analitica, ovvero ai casi in cui è possibile in qualche modo procedere (anche per successive approssimazioni e semplificazioni) all'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali che ne descrivono la dinamica.

Ma questo problema è risolvibile? Si dirà senza dubbio che lo è, perché non soltanto il problema è determinato, ma perché le formule differenziali, dalle quali la soluzione dipende, sono trovate, così che non si tratta che di cercarne gli integrali. Ma quali integrali? Si vuole che siano delle formule finite? Dimostrerò che non ve ne sono affatto, e che tutte quelle che si potranno ancora trovare non sono sufficienti a rendere la soluzione completa. Tutto ciò che si dovrà fare riporta dunque a ciò che si è fatto in relazione alla quadratura del cerchio, ossia fare ricorso alle serie infinite; e la questione si riduce a trovare serie che siano convergenti e trattabili. Ecco che questi due problemi, benché diversamente famosi, si assomigliano perfettamente (Lambert, 1767, p. 354)[1].

Verso la conclusione del suo lavoro, tuttavia, Lambert compie un passo ulteriore (che si può direttamente ricollegare alla questione della stabilità di lungo periodo del Sistema solare), rimasto largamente ignorato dai contemporanei, ma che oggi sappiamo essere di fondamentale importanza, perché contiene *in nuce* una nozione che si rivelerà cruciale nello studio dei sistemi

1. In questo e negli altri capitoli, se non indicato diversamente, le traduzioni dei testi citati sono da considerarsi degli autori.

non-lineari dopo i risultati limitativi di Poincaré: quella di tempo *caratteristico* ("tempo di Lyapunov" t_λ, nei termini della fisica dei sistemi complessi del Novecento) oltre il quale non è più possibile approssimare la dinamica di un sistema *non-lineare* a quella di un sistema *lineare*, perché una minima variazione nelle condizioni iniziali produce traiettorie esponenzialmente divergenti ("sensibilità alle condizioni iniziali") che rendono oltre quel tempo caratteristico impossibile *prevedere* l'evoluzione del sistema, nonostante questo resti un sistema *deterministico*.

Ma dal momento che ho riportato questo caso particolare del problema dei tre corpi, converrà a tale proposito fare ancora qualche considerazione generale. La prima che si offre abbastanza naturalmente è che potendo il tempo t essere preso grande a piacere, le serie trovate non saranno convergenti per una quantità t qualsiasi. Non si potranno dunque calcolare le distanze x,y,z che per dei tempi t abbastanza piccoli in modo che le serie trovate siano ancora sufficientemente convergenti. Non per questo tuttavia tali serie cessano d'essere utili. L'unica differenza è che bisogna calcolare per intervalli (ivi, p. 363).

Lambert sta sostanzialmente suggerendo che per poter continuare a lavorare con serie "sufficientemente convergenti", e quindi per poter continuare ad avere a che fare con integrazioni approssimate delle equazioni differenziali di un sistema a tre corpi generico, non si possono considerare intervalli di tempo Δt arbitrari, bensì sufficientemente piccoli (oggi diremmo, interpolando le sue riflessioni: "più piccoli del tempo di Lyapunov caratteristico del sistema"), perché altrimenti nella maggior parte dei casi le serie non convergerebbero. Lambert è ancora convinto tutto sommato, e significativamente, che suddividendo Δt in intervalli abbastanza piccoli e reiterando i calcoli a ogni intervallo sia possibile evitare che le serie divergano e quindi aggirare il problema della loro non convergenza in generale per intervalli di tempo arbitrari. Il matematico svizzero non si spinge oltre. Saranno gli sviluppi della fisica dei sistemi non-lineari dopo Poincaré a mostrare come la reiterazione di un'approssimazione lineare per intervalli di tempo più piccoli del tempo di Lyapunov funzioni solo per $t < t_\lambda$, mentre per $t > t_\lambda$ il comportamento del sistema diverge inevitabilmente da quello approssimato per *linearizzazione* dai nostri calcoli.

Non abbiamo fatto casualmente riferimento all'ipotesi "di Kant-Laplace" sulla genesi e stabilizzazione del Sistema solare, perché negli anni Ottanta del Settecento sono soprattutto Lagrange e Laplace a offrire la trattazione più completa della questione, anche se questo non permette comunque loro di pervenire a una soluzione analitica generale del problema dei tre corpi. Dell'opera di Lagrange ci occuperemo a breve più nel dettaglio. Laplace, in parte anche basandosi sui lavori di Lagrange, giunge a dimostrare in una serie di memorie presentate all'Accademia delle Scienze di Parigi (*Sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, 1787; *Théorie de Jupiter et de Saturne*, 1788; *Sur l'équation séculaire de la Lune*, 1788; *Sur les variations séculaires des orbites des planètes*, 1789; *Théorie des satellites de Jupiter*, 1791-92) (Laplace, 1884a; 1884b; 1884c; 1884d; 1884e) che tutte le orbite dei pianeti del Sistema solare, incluse quelle di Marte, Giove e Saturno, sono *sostanzialmente* stabili nel lungo periodo, chiuse e con periodicità regolare, oscillando intorno a *valori medi* e discostandosene nel complesso in modo relativamente trascurabile, a meno di perturbazioni impreviste che per Laplace potrebbero intervenire solo dall'esterno del sistema.

In realtà, come oggi sappiamo grazie agli studi di carattere numerico e qualitativo compiuti molti decenni dopo i risultati limitativi di Poincaré da fisici matematici del Novecento come Andrej Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), Jürgen Kurt Moser (1928-1999) e Vladimir Igorevich Arnold (1937-2010) (Alexandrov, Kolmogorov, Lavrent'ev, 2004), il comportamento del Sistema solare (come quello di qualsiasi sistema costituito da più di un pianeta, per non parlare di quelli che orbitano intorno a stelle binarie) è intrinsecamente *non-lineare deterministico* e quindi *caotico* ("caos deterministico") oltre un tempo caratteristico di Lyapunov molto grande derivato dai cosiddetti *termini secolari* delle equazioni differenziali che ne descrivono la dinamica: un tempo dell'ordine di decine di milioni di anni, oltre il quale le nostre più accurate previsioni su posizioni e velocità dei pianeti e dei satelliti diventano solo probabili e sempre meno attendibili, anche se su tempi lunghissimi, di miliardi di anni (Celletti, Perozzi, 2007).

Su scale temporali umane il Sistema solare pertanto ci appare (ed è in effetti approssimabile) come un sistema stabile, dotato di orbite chiuse periodiche e punti di equilibrio come quelli individuati da Lagrange. Ciò nonostante, le perturbazioni e le anomalie che potrebbero alterare struttura e periodicità del sistema così come lo conosciamo non dipendono solo da eventuali fattori di disturbo esterni (ad esempio corpi interstellari attratti dal campo gravitazionale del Sole), o da collisioni tra pianeti e asteroidi che potrebbero modificarne l'orbita, ma anche da fenomeni di risonanza gravitazionale tra pianeti (non solo i più massivi come Giove, che pure rappresenta il principale fattore di instabilità di lungo periodo), la cui possibilità è ormai accertata. Senza contare, in un quadro relativistico, fenomeni altrimenti impossibili da spiegare in ambito newtoniano come la precessione del perielio di Mercurio o gli effetti dissipativi piccolissimi, di fatto trascurabili ma pur sempre non nulli, indotti sui moti planetari dall'emissione di onde gravitazionali.

1.7
Dall'analisi algebrica alla meccanica analitica

Le ricerche di Laplace sui moti secolari dei corpi celesti negli anni Ottanta del Settecento, come abbiamo detto, riprendono in buona misura i lavori coevi di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), che a sua volta muove dai risultati precedentemente ottenuti da Euler, Clairaut e d'Alembert. Al 1764 risalgono i suoi primi studi sul sistema Sole-Terra-Luna, al 1766 le prime ricerche sul moto dei satelliti di Giove (Lagrange, 1877a; 1877b). Tuttavia è con l'*Essai sur le problème des trois corps* (1772) che Lagrange affronta sistematicamente la questione da un punto di vista generale, tenendo conto di tutti i lavori sull'argomento pubblicati in precedenza (Lagrange, 1877c).

Neppure Lagrange giunge a una soluzione definitiva del problema esprimibile in forma analitica, o anche solo in termini di serie di potenze sempre convergenti indipendentemente dagli intervalli di tempo Δt considerati (per riprendere le argomentazioni di Lambert), ma la sua trattazione esaustiva del problema *ristretto* dei tre corpi, inseparabile dalla questione della stabilità del Sistema solare, rappresenta un risultato acquisito e duraturo per la meccanica celeste di Sette-Ottocento, ancora per fisici matematici come Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e sostanzialmente fino ai lavori di Aleksandr Michailovich Lyapunov (1857-1918) e dello stesso Poincaré.

Lagrange in particolare introduce importanti innovazioni matematiche rispetto ai metodi impiegati da Euler nello studio dei sistemi *conservativi* come quelli puramente gravitazionali della meccanica celeste, innovazioni che troveranno una loro sistematizzazione nella prima edizione della sua *Mécanique Analytique* (1788-89) (Lagrange, 1788) e che diverranno strumenti canonici della meccanica razionale ottocentesca nell'epoca matura dell'*analisi classica*, giungendo quasi senza soluzione di continuità all'impostazione degli odierni manuali universitari di meccanica.

Un sistema dinamico si dice *conservativo* se su di esso agiscono solo forze conservative, ovvero forze (come quella gravitazionale) che sono in funzione soltanto della *posizione*, altrimenti siamo in presenza di forze *dissipative* e il sistema in questione sarà almeno in parte un sistema dissipativo. Una conseguenza immediata di ciò è che il lavoro meccanico compiuto da una forza di campo conservativo (tipicamente i campi centrali come quello gravitazionale o quello elettrostatico) in un circuito chiuso è nullo, mentre questo non vale evidentemente per le forze dissipative, come ad esempio le forze d'attrito.

Per studiare le *costanti del moto* (quantità di moto, momento angolare ed energia meccanica E_0) di un sistema conservativo come quello rappresentato dal sistema Sole-Terra-Luna, Lagrange introduce una funzione scalare (ossia che ha a che fare con grandezze scalari e non vettoriali) che da lui prenderà il nome di *lagrangiana*, definita come la differenza tra l'*energia cinetica* $K = \frac{1}{2} mv^2$) e l'*energia potenziale* (nel caso specifico gravitazionale, $U = - G \frac{Mm}{r}$) in ogni punto della traiettoria per ogni elemento del sistema. In base al *principio di minima azione* (*principio variazionale di Hamilton*), un sistema fisico in moto tra due punti segue un cammino che, tra tutti i percorsi possibili, è quello che minimizza la somma (l'integrale *azione*) dei valori della lagrangiana in tutti i punti del cammino. A partire da ciò si scrivono le equazioni differenziali del moto che più avanti saranno note come "equazioni di Eulero-Lagrange". Nel descrivere sistemi fisici, l'invarianza (*simmetria*) della funzione lagrangiana rispetto a trasformazioni continue delle coordinate dei punti del sistema determina la presenza di quantità conservate durante il moto, appunto le costanti o *invarianti del moto* di cui sopra (Blay, 1992).

Il principio variazionale di Hamilton, dal nome del fisico matematico William Rowan Hamilton (1805-1865), assumerà rapidamente un ruolo di assoluta preminenza negli sviluppi ottocenteschi e poi novecenteschi della meccanica razionale, perché grazie agli strumenti offerti dal *calcolo delle variazioni* (branca dell'analisi superiore che si occupa di problemi di *massimo*, di *minimo* e di ottimalità/ottimizzazione) permetterà di passare dallo studio dinamico dei sistemi propriamente detti a quello del loro *spazio delle configurazioni* (o *delle fasi*), cioè lo spazio "di secondo livello" i cui punti rappresentano tutti i possibili stati di un sistema e le cui traiettorie rappresentano tutte le sue possibili evoluzioni. Senza il passaggio dalla *meccanica lagrangiana* a quella *hamiltoniana*, centrata sullo studio dello spazio delle fasi di un sistema dinamico, non si potrebbero comprendere gli sviluppi della *meccanica statistica* di Boltzmann nella seconda metà dell'Ottocento, né tantomeno il lavoro di Poincaré sul problema dei tre corpi, ma alla base di questo ampliamento teorico resta l'opera di Lagrange (Fraser, 1983; 1985; 1992).

Dopo aver introdotto la sua nuova funzione e aver imposto la minima azione come condizione per la trattazione delle costanti del moto, Lagrange, per ridurre i gradi di libertà di un sistema a tre corpi in modo da ottenere

FIGURA 1.1
Il problema dei tre corpi ristretto e gli equilibri di Lagrange

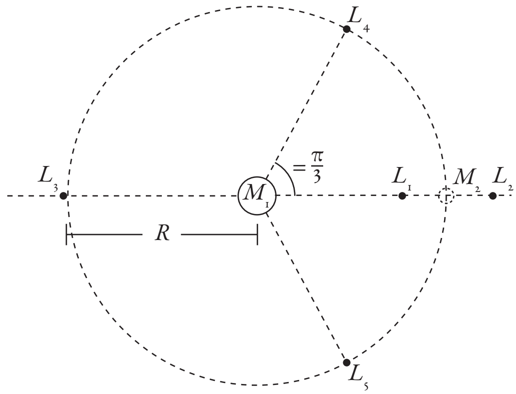
$$L_1 = \left(R \cdot \left(1 - \sqrt[\mathrm{a}]{\frac{a}{3}}\right), 0\right) \qquad a = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

$$L_2 = \left(R \cdot \left(1 + \sqrt[\mathrm{a}]{\frac{a}{3}}\right), 0\right)$$

$$L_3 = \left(-R \cdot \left(1 + \frac{5a}{12}\right), 0\right)$$

$$L_4 = \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}, \frac{\sqrt{3}}{2} R\right)$$

$$L_5 = \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} R\right)$$



un caso ristretto trattabile analiticamente, assume come ipotesi di lavoro che un corpo abbia massa molto minore rispetto agli altri due e che le tre orbite da loro descritte possano essere considerate circolari e complanari. Giunge così a individuare *cinque punti di equilibrio gravitazionale* all'interno del sistema, tre di equilibrio *instabile* e due di equilibrio *stabile*, che verranno più tardi chiamati *punti lagrangiani*.

L_1, L_2, L_3 sono punti di equilibrio gravitazionale instabile (*selle di potenziale*), ossia basta una piccola perturbazione perché M_3 si allontani lungo l'asse che congiunge M_1 e M_2. Sono tuttavia possibili orbite *semi-chiuse* e *quasi-periodiche* intorno a questi punti ("orbite di Lyapunov"). L'esistenza di L_1, L_2, L_3 non dipende dal moto di rotazione delle masse del sistema (equilibrio gravitazionale *statico*).

L_4 e L_5 si trovano invece ai vertici di due triangoli equilateri che hanno per base la congiungente

$M_1 - M_2$. A differenza di L_1, L_2 e L_3, L_4 e L_5 sono punti di equilibrio gravitazionale stabile (*buche di potenziale*): se allontanato da quella posizione M_3 tenderà a tornare in L_4 o in L_5, o più probabilmente inizierà a oscillare oppure a orbitare secondo traiettorie chiuse e periodiche intorno a essi. L'esistenza di L_4 e L_5 dipende invece dal moto di rotazione delle masse del sistema (equilibrio gravitazionale *dinamico*), per azione combinata della forza di gravità e delle forze non-inerziali rotazionali (forza centrifuga e forza di Coriolis).

L'individuazione e descrizione degli "equilibri di Lagrange" e delle loro proprietà, per quanto importantissima nello studio di tutte le versioni ristrette del problema dei tre corpi, non riesce come abbiamo detto a illuminare la strada verso la soluzione generale del problema, nella cui esistenza, nonostante tutto, Lagrange dimostra di credere (come tutti i suoi contemporanei del resto, con la sola eccezione forse di Lambert). Lagrange tuttavia esplicita nel suo lavoro del 1772 che risolvere per via analitica il problema generale dei tre corpi significa dover integrare (per via diretta o per approssimazione mediante sviluppo in serie di potenze) un sistema di equazioni differenziali solitamente *non-ordinarie* in più variabili (x, y, z e t), del sesto ordine (ovvero contenenti termini differenziali fino alla derivata sesta della posizione rispetto al tempo) e generalmente *non-lineari*, in cui compaiono ad esempio termini "rettangolari" come $\frac{dxdy}{dt}$ o misti come $x\frac{dy}{dt}$: è questo il vero e proprio manifesto del programma di ricerca postlagrangiano intorno al problema dei tre corpi che sarà recepito e sviluppato dalla fisica matematica dell'Ottocento.

1.8
La meccanica razionale e l'analisi classica

Abbiamo già avuto modo di parlare della "concettualità chiusa" e della "dinamicità chiusa del possibile" che caratterizza il modo di "fare scienza" del Settecento nel periodo di massimo sviluppo dell'*analisi algebrica*, in cui si assiste a una costante osmosi e oscillazione tra matematica e fisica: argomenti matematici vengono usati per sostenere o confutare ipotesi fisiche e viceversa argomenti fisici vengono usati per sostenere o confutare ipotesi matematiche, apparentemente senza alcuna soluzione di continuità (come i termini della controversia Clairaut-Buffon intorno a $\frac{1}{r^2}$ mettono bene in evidenza) (Casini, 1980). In generale del calcolo si fa un uso abbastanza disinvolto, incurante di più profondi e sottostanti problemi metodologici ed euristici, di interpretazione del "significato fisico" delle espressioni matematiche impiegate o di carattere logico-fondazionale sul tipo di giustificazione dei procedimenti adottati: dal momento che il calcolo sembra "funzionare" e produrre importanti risultati, lo si eleva di fatto a *forma mentis* e *modus* *operandi*; nella convinzione, si è detto, che il linguaggio dell'analisi non sia un semplice strumento ma sia il linguaggio stesso della natura e permetta di leggere "in trasparenza" l'essenza stessa dei fenomeni (Fraser, 1989).

Manca completamente (almeno tra gli addetti ai lavori) l'idea che la fisica costruisca *modelli* matematico-sperimentali che *interpretano* i fenomeni, selezionando di volta in volta le variabili di stato e i parametri di controllo ritenuti rilevanti ai fini della modellizzazione, e che questo ponga un problema di metodo e di merito rispetto all'*arbitrarietà* di fondo di certe scelte e operazioni connaturata allo studio fisico-matematico dei fenomeni naturali, in particolare dei sistemi dinamici. Pensare in termini di modello e di interpretazione significa infatti rinunciare all'idea e alla pretesa di una traducibilità immediata e totale tra formalismo analitico e "libro della natura" in favore di una correlazione funzionale, "isomorfica" tra le operazioni del calcolo e le regolarità dei fenomeni (Black, 1962; Bellone, 1973, 1980; Boniolo, 1999; Peruzzi, 2000).

Si tratta di una sensibilità metodologica ed epistemologica nuova che emergerà progressivamente nel corso del XIX secolo (in particolare con i lavori di Boltzmann, Mach e dello stesso Poincaré) e che conoscerà una drammatica accelerazione con la "crisi dei fondamenti" delle principali branche della fisica contemporanea dalla fine dell'Ottocento e per tutta la prima metà del Novecento (Boltzmann, 2004a; 2004b; 2004c; 2004d). Come vedremo, il risultato negativo di Poincaré intorno alla soluzione generale del problema dei tre corpi, negli stessi anni in cui il fisico matematico francese è impegnato a elaborare una sua versione della relatività (ristretta) che integri e renda compatibili meccanica classica (trasformazioni galileiane) ed elettromagnetismo (trasformazioni di Lorentz), senza rinunciare alla concezione newtoniana di uno spazio e di un tempo assoluti, rappresenterà uno dei momenti cruciali della crisi di fine secolo.

Nel corso dell'Ottocento la *meccanica analitica* lagrangiana (con i successivi e fondamentali sviluppi hamiltoniani che ne segnano l'evoluzione in *meccanica razionale*) si impone come il modello egemone di razionalità scientifica, almeno in quelle che cominciano a chiamarsi proprio in questo periodo "scienze esatte" (matematica, fisica, astronomia), contrapposte alle "scienze induttive" (chimica, biologia, storia naturale). Nella riduzione programmatica della fisica a branca della matematica (che suscitava l'ammirazione di Comte a inizio secolo e sarebbe stata poi duramente contestata da Mach sul suo finire) (Mach, 2008), "fare fisica" diventa semplicemente attribuire un significato fisico (teorico e/o sperimentale) alle manipolazioni di per sé puramente simbolico-formali del calcolo, dotate del massimo grado di astrazione, generalità e versatilità (Bottazzini, 1989). Scrive a questo proposito lo stesso Lagrange in apertura della sua *Mécanique Analytique*:

Abbiamo già vari trattati di meccanica, ma il piano di questo è interamente nuovo. Io intendo ridurre la teoria di questa scienza, e l'arte di risolvere i problemi relativi ad essa, a formule generali, il semplice sviluppo delle quali fornisca tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ciascun problema. Spero che la maniera in cui ho cercato di raggiungere quest'obiettivo non lasci nulla a desiderare. [...] In quest'opera non si troverà nessuna figura. I metodi che vi espongo non richiedono né costruzioni né ragionamenti geometrici o meccanici, ma soltanto delle operazioni algebriche, sottoposte ad un procedimento regolare e uniforme. Coloro che amano l'analisi, vedranno con piacere che la meccanica ne è diventata una branca, e mi saranno grati di averne così esteso il dominio[2] (Lagrange, 1788, p. VI).

Al contempo, tuttavia, si assiste nel corso del XIX secolo a una maturazione della riflessione matematica (e per certi aspetti anche filosofica) sui fondamenti logici e sui presupposti metodologici alla base del calcolo, innanzitutto volta a una sua formalizzazione, giustificazione e infine fondazione rigorosa, senza ricorrere ad argomenti estranei alla matematica mutuati da altri ambiti come appunto la fisica. Si pensi solo alla trattazione formale della nozione di funzione (imprescindibile per tutta la fisica matematica) operata da Peter Gustav Dirichlet (1805-1859).

Nel passaggio dall'*analisi algebrica* settecentesca all'*analisi classica* ottocentesca (che a metà del secolo evolve nei programmi paralleli e complementari di *algebrizzazione della logica* di Boole e di *aritmetizzazione dell'analisi* di Dedekind e Peano) giungono a piena consapevolezza quei problemi di esistenza e unicità, di legittimità del passaggio al limite, di derivabilità e integrabilità rispetto alle funzioni continue, di significato fisico-matematico delle operazioni di derivazione e integrazione, e non da ultimo di correttezza formale su base logico-algebrica, che avevano fatto da sfondo implicito a un uso sostanzialmente irriflesso e pragmatico del calcolo in fisica (e per contro della fisica nel calcolo) per tutto il XVIII secolo (Bottazzini, 1981). È nei termini dell'analisi matematica classica, così come emerge nei decenni centrali del XIX secolo dai lavori di Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Theodor Weierstrass (1815-1897) o Rudolph Otto Lipschitz (1832-1903), che diventa finalmente possibile disporre di una nozione formale, algebrica di *linearità* e di una sistematizzazione rigorosa degli sviluppi in serie di potenze delle funzioni, con cui affrontare consapevolmente le

2. Traduzione di Angelo Marinucci.

sfide rappresentate dal "programma di ricerca" lagrangiano-hamiltoniano in dinamica dei sistemi intorno al problema generale dei tre corpi e allo studio delle perturbazioni.

Il concetto di linearità (e quello correlato di *algebra lineare*) può infatti essere intuitivamente visualizzato nei termini dell'analisi classica dalla seguente definizione formale:

$f: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare da V a W se, per ogni elemento x e y appartenente a V e per ogni scalare λ e μ, vale la relazione
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

Questa nozione più generale e astratta di "distributività" rende bene l'idea della sovrapposizione lineare degli effetti, ad esempio nella somma vettoriale ("parallelogramma") delle forze. Le equazioni differenziali *ordinarie*, come si è visto, coinvolgono funzioni in una sola variabile. Una proprietà notevole delle equazioni differenziali *ordinarie lineari* evidenziata dall'analisi matematica moderna, qualunque sia il loro ordine, è quella di poter essere sempre ricondotte a equazioni ordinarie lineari del *primo ordine*.

Per l'analisi algebrica (preclassica) del XVIII secolo, in cui procedimenti matematici e fisici erano indissolubilmente intrecciati, scrivere un'equazione differenziale che esprimesse la dinamica di un sistema o di una sua componente equivaleva implicitamente a scrivere (quando possibile, il che risultò presto un caso raro nei sistemi a più di due corpi) un'equazione differenziale ordinaria lineare, o almeno cercare di ridursi in qualche modo a un'equazione ordinaria lineare, che si era in grado di trattare per integrazione diretta, mediante il calcolo integrale, o indiretta, cercando di far convergere al limite le serie infinite di potenze impiegate per approssimare le funzioni primitive che si supponeva fossero soluzioni analitiche delle equazioni dinamiche del sistema (Israel, 1991).

Per la meccanica razionale del XIX secolo, intimamente legata agli sviluppi fondazionali dell'analisi classica e forte degli strumenti messi a disposizione da una meccanica analitica lagrangiana opportunamente reinterpretata alla luce dell'approccio variazionale hamiltoniano, risolvere il problema generale dei tre corpi equivale invece esplicitamente a studiare le *costanti del moto* di un sistema dinamico *conservativo* costituito da tre masse che gravitano l'una intorno all'altra e intorno al loro comune centro di massa.

Non si tratta più di scrivere direttamente (in coordinate cartesiane o polari) il sistema di equazioni differenziali che descrive le forze in gioco, e che ormai si sa benissimo essere un sistema di equazioni differenziali *non-ordinarie* e *non-lineari* del *sesto ordine*, bensì di scrivere il sistema di equazioni differenziali (anch'esse non-lineari ma "più semplici" perché di ordine inferiore) che descrive l'evoluzione dello *spazio delle fasi* associato al sistema fisico. Non si tratta più quindi di cercare di risalire direttamente alla legge oraria del sistema, ossia l'evoluzione temporale delle sue traiettorie nello spazio tridimensionale, ma di determinare, se possibile, la legge oraria "di secondo livello" delle *traiettorie nello spazio delle fasi* a esso associato, vale a dire l'evoluzione temporale dei suoi *valori di stato* (trattati come punti dello *spazio delle fasi*, con le variabili di stato come coordinate cartesiane o polari del nuovo spazio così definito).

È questo il modo in cui nella seconda metà dell'Ottocento si fa dinamica dei sistemi, al punto che il concetto di "spazio delle fasi/configurazioni" assumerà un ruolo centrale nello sviluppo della meccanica statistica di Boltzmann e della teoria cinetica dei gas a partire dagli anni Settanta-Ottanta (Cercignani, 1997). Sarà l'approccio canonico allo studio dei sistemi conservativi con cui Poincaré alla fine del secolo giungerà al suo risultato limitativo intorno al problema generale dei tre corpi.

1.9
Il teorema di Poincaré: limite invalicabile o nuovo spazio di possibilità?

Nel 1890 Jules Henri Poincaré (1854-1912) pubblica sulla rivista "Acta Mathematica" un lungo articolo, a tutti gli effetti un saggio, dal titolo *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, in cui giunge a una dimostrazione rigorosa del fatto che non esiste in linea di principio una soluzione analitica generale del problema, neppure per approssimazione (Poincaré, 1890; 1995a). Se infatti la via dell'integrazione diretta dei sistemi di equazioni differenziali non-ordinarie e non-lineari era ormai da tempo stata abbandonata come matematicamente impraticabile (e non per una presunta "imperfezione" del calcolo integrale che prima o poi gli sviluppi dell'analisi avrebbero superato, come ancora supponeva Comte intorno al 1830), fino a Poincaré l'interesse dei fisici matematici per il problema generale dei tre corpi, mediato dagli strumenti concettuali della meccanica lagrangiano-hamiltoniana, si era concentrato sulla possibilità di trovare sviluppi in serie infinite di potenze di funzioni che convergendo al limite approssimassero le soluzioni analitiche cercate.

Tuttavia era emerso in modo sempre più chiaro come le serie convergenti fossero l'eccezione e non la regola, e che coincidessero proprio con quei casi particolari che permettevano di ridurre i gradi di libertà e quindi la complessità del sistema, non riducibile in ogni caso a due corpi mutuamente interagenti più una perturbazione esterna agente indipendentemente su entrambi. Il risultato fondamentale di Poincaré, che segna per certi aspetti un punto fermo (ma non definitivo, come diremo) nella storia del "problema dei tre corpi" così come è nato e si è sviluppato nell'ambito della meccanica classica postnewtoniana, consiste nell'aver dimostrato come teorema quella che fino a quel momento era stata al massimo una *congettura*. Il problema dei tre corpi non ha soluzioni generali perché in generale le serie sono *divergenti*, a meno di versioni ristrette del problema stesso.

> Le difficoltà iniziano non appena il numero *n* dei corpi è uguale a tre: il problema dei tre corpi ha finora eluso tutti gli sforzi degli analisti. Poiché l'integrazione completa e rigorosa si rivela impossibile, gli astronomi sono stati costretti a procedere per approssimazioni successive: l'uso di questo metodo era reso più agevole dal fatto che le masse dei pianeti sono assai più piccole in confronto a quella solare. Si giunge così all'idea di sviluppare le coordinate dei corpi celesti secondo le potenze crescenti delle masse (Poincaré, 2006a, p. 40).

> Gli sviluppi in serie che essi ottengono potrebbero essere perfino considerati come una soluzione definitiva del problema dei tre corpi, se si stabilisse la loro convergenza. Disgraziatamente non è così. In mancanza di questa convergenza, essi possono darci un'approssimazione indefinita: anche se forniranno più decimali esatti rispetto ai procedimenti di una volta, non ne potranno fornire un numero arbitrariamente grande [...]. Il moto di tre corpi celesti dipende dalle loro posizioni e dalle loro velocità iniziali. Una volta assegnate queste condizioni iniziali, si sarà definita una soluzione particolare del problema (ivi, p. 42).

Dai passi citati si evince chiaramente come Poincaré per primo consideri il suo teorema come *limitativo*, come una "non-soluzione" che rivela l'illusorietà di ogni precedente tentativo di trovare una soluzione analitica generale, anche solo approssimata, al problema dei tre corpi (e quindi a maggior ragione degli *n* corpi): un duro colpo assestato agli strumenti della meccanica razionale classica, comunque fondati sulla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali (sia pur in termini variazionali e di spazio delle fasi) e sull'identificazione tra matematica e natura, scrittura/soluzione di equazioni differenziali e descrizione/soluzione di un problema fisico che aveva sempre contraddistinto l'approccio ai tre corpi fin dai primi decenni del Settecento (Israel, 2003).

Il riferimento alla dipendenza delle traiettorie e dell'evoluzione complessiva del sistema dalle condizioni iniziali di posizione e velocità dei suoi elementi è decisivo, ed è solo apparentemente classico: Poincaré infatti è consapevole che fissare le condizioni iniziali nel caso dei tre corpi significa definire soltanto "una soluzione *particolare* del problema", laddove un Laplace o un Lagrange avrebbero presunto di poter predire a partire da esse in modo univoco l'intera evoluzione passata e futura del sistema. Poincaré è il primo a parlare espressamente di *sensibilità alle condizioni iniziali*, ovvero del fatto che in un sistema dinamico *non-lineare* (egli considera solo i sistemi *conservativi*) una variazione anche minima nelle condizioni iniziali (o, il che è lo stesso, una variazione del grado di approssimazione con cui le misuriamo) produce traiettorie differenti, che tendono a divergere esponenzialmente nel tempo (Bartocci, 1995). Scrive Poincaré nel saggio *Le hasard* (1907):

> Una causa minima, che ci sfugge, determina un effetto considerevole, del quale non possiamo non accorgerci [...]. Se conoscessimo con esattezza le leggi della natura e lo stato dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere quale sarà lo stato di questo stesso universo ad un istante successivo. Ma quand'anche le leggi naturali non avessero per noi più segreti, potremmo conoscere lo stato iniziale soltanto *approssimativamente*. Se ciò ci permette di conoscere lo stato successivo con *la stessa approssimazione*, non abbiamo bisogno di altro, e diremo che il fenomeno è stato previsto, che esistono leggi che lo governano. Ma non è sempre così: può succedere che piccole differenze nelle condizioni iniziali generino differenze grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore a proposito delle prime genererebbe allora un errore enorme a proposito di quest'ultimi. La previsione diventa impossibile, siamo di fronte al fenomeno fortuito (Poincaré, 1995b, pp. 107-8).

L'atteggiamento per certi aspetti contraddittorio di Poincaré di fronte al problema della sensibilità alle condizioni iniziali nel caso di un sistema non-lineare come quello dei tre corpi è complesso e sintomatico delle difficoltà per un fisico matematico di fine Ottocento di accettare l'idea che *determinismo* e *prevedibilità* non siano più due concetti coestensivi: ciò vale esclusivamente per i sistemi *deterministici lineari* (il cui studio attraverso gli strumenti dell'analisi aveva rappresentato fino a quel momento il modello per antonomasia di scientificità), ai quali occorre affiancare una nuova classe, quella dei sistemi *deterministici non-lineari*.

Questi ultimi sono deterministici nella misura in cui la loro evoluzione temporale, pur non essendo lineare, obbedisce a leggi deterministiche, come appunto i princìpi della dinamica e la gravitazione universale, e non dipende da processi stocastici, cioè aleatori. Tuttavia si tratta di sistemi la cui evoluzione temporale (in particolare per $t > t_\lambda$, come abbiamo già accennato sopra, dove il tempo caratteristico di Lyapunov t_λ rappresenta il limite di validità di ogni linearizzazione per approssimazione del sistema) *non è prevedibile*, sia nella direzione del futuro che in quella del passato: uno stesso stato presente può essere infatti il punto di convergenza di molteplici e differenti traiettorie nel passato e il punto di divergenza di molteplici e differenti traiettorie nel futuro. In questa ottica il tempo caratteristico t_λ rappresenta una misura della "velocità" con cui nel sistema *emerge* una dinamica *caotica*, dove la perdita di informazione (nel passato come nel futuro) sulle traiettorie specifiche di ogni suo elemento è direttamente connessa con la crescita della sua entropia e quindi con il carattere *irreversibile* della sua evoluzione (Cassirer, 1970).

Tutto questo però non viene sviluppato da Poincaré nel suo saggio, pur fondamentale. Egli si ferma sostanzialmente alla portata negativa e limitativa del risultato raggiunto, entro il perimetro tradizionale delimitato dal "problema dei tre corpi" in meccanica celeste, senza approfondire ulteriormente la questione della sensibilità alle condizioni iniziali, come del resto la stessa nozione di *non-linearità*, e quindi in prospettiva quelle di "caos deterministico" e di *complessità* (Bertuglia, Vaio, 2003). Le implicazioni più profonde del suo lavoro (rilette anche alla luce della "seconda rivoluzione scientifica" del periodo 1900-50) verranno riprese oltre mezzo secolo dopo nella *teoria generale dei sistemi*, che si svilupperà nel corso del Novecento come area di ricerca interdisciplinare al confine tra matematica, fisica, chimica, biologia e informatica, estendendosi negli ultimi decenni del XX secolo anche all'economia e alle scienze sociali (Bertalanffy, 2008).

Sarà in un contesto profondamente rinnovato che gli orizzonti di pensabilità della scienza contemporanea si amplieranno notevolmente per includere quattro tipologie fondamentali di sistemi fisici e le loro possibili combinazioni, tipologie trasversali alle distinzioni altrettanto importanti tra sistemi *conservativi* e *dissipativi* (questi ultimi a loro volta vicini o lontani dall'equilibrio termodinamico) e tra sistemi *aperti* (che scambiano sia materia che energia con l'ambiente), *chiusi* (che scambiano solo energia con l'ambiente) e *isolati* (che non scambiano né materia né energia con l'ambiente): 1. sistemi *deterministici lineari*, riducibili alle interazioni tra i loro elementi, prevedibili e reversibili; 2. sistemi *deterministici non-lineari*, irriducibili alle interazioni tra i loro elementi, imprevedibili e irreversibili;

3. sistemi *stocastici lineari* (in meccanica quantistica), riducibili alle interazioni tra i loro elementi, prevedibili su base statistica e reversibili; 4. sistemi *stocastici non-lineari* (in meccanica statistica), irriducibili alle interazioni tra i loro elementi, dal comportamento aleatorio, imprevedibili e irreversibili, al massimo grado di "caoticità" (Bischi, 2004; Crutchfield *et al.*, 1991; Dahan-Dalmédico, Chabert, Chemla, 1992; Gleick, 2005; Maccone, Salasnich, 2008; Ruelle, 1991, 2003).

È significativo che Poincaré, nonostante il suo risultato limitativo, esprima una certa fiducia nella possibilità che lo studio dei sistemi a molti corpi possa un giorno essere affrontato in modo più organico ed efficace da strumenti matematici completamente nuovi, non riconducibili all'approccio classico, che vedeva nella scrittura e nella tentata risoluzione di sistemi di equazioni differenziali la via maestra per trattare rigorosamente la dinamica e l'evoluzione di un sistema fisico.

> Tutto ciò che possiamo affermare è che il problema dei tre corpi non può essere risolto con gli strumenti di cui disponiamo oggi: quelli che occorrerà ideare ed impiegare per arrivare alla soluzione dovranno essere di certo assai differenti e di natura ben più complessa (Poincaré, 2006a, p. 48).

Da un lato sembra di poter rintracciare in queste affermazioni l'eredità (e il peso) di una lunga tradizione nel rapporto tra matematica e natura ormai al suo epilogo, l'idea che una descrizione e spiegazione matematica coerente e in qualche modo "conclusa" dei fenomeni naturali sia auspicabile, anzi necessaria per il fatto stesso che tali fenomeni esistono e devono essere governati da leggi immutabili, anche quando sono intrinsecamente caotici e persino aleatori; ragione per cui un risultato limitativo indicherebbe in definitiva un'insufficienza degli strumenti matematici a nostra disposizione per affrontare adeguatamente un problema. D'altro canto proprio la non-linearità e la sensibilità alle condizioni iniziali, così come l'emergere spontaneo di strutture e configurazioni ordinate nell'ambito di un'evoluzione complessivamente caotica, inducono lo stesso Poincaré a rivalutare l'importanza di uno studio qualitativo, non analitico (ma pur sempre matematico, attraverso metodi numerici e geometrici) dei sistemi non-lineari, in grado di aprirsi a strumenti e concetti nuovi (come quello di attrattore, una particolare regione dello spazio delle fasi che un sistema tende a raggiungere nel corso della propria evoluzione) (De Angelis, 1996).

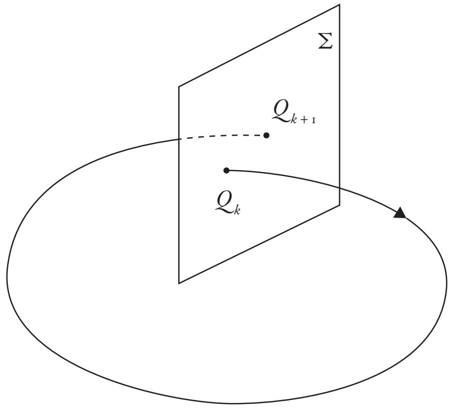
È in questa prospettiva che Poincaré elabora le "mappe" che da lui prenderanno il nome, applicate tanto allo studio delle traiettorie di un sistema (conservativo) nello spazio tridimensionale quanto a quello delle traiettorie di stato nello spazio delle fasi a esso associato. Dal momento che non è possibile prevedere l'evoluzione di una traiettoria in un sistema non-lineare, l'idea è quella di considerare la mappa determinata dalle intersezioni successive fra le traiettorie e un piano Σ (la "sezione di Poincaré") trasversale al flusso del sistema.

La mappa risultante dall'evoluzione temporale del sistema permette di distinguere, attraverso uno studio qualitativo di tipo geometrico, le zone di ordine (ossia di maggiore stabilità delle traiettorie, corrispondenti a determinati attrattori nello spazio delle fasi) dal cosiddetto "mare caotico". Le zone identificabili come ordinate sono contraddistinte da forme più o meno circolari o ellittiche concentriche e più o meno regolari.

Da un punto di vista matematico le mappe di Poincaré sono ottenibili considerando un sistema non-lineare H come costituito da una parte integrabile (lineare) H_0, di cui si conoscono le soluzioni, e da una parte non integrabile εH_1, caratterizzabile come perturbazione, tale per cui è possibile scrivere la funzione $H = H_0 + \varepsilon H_1$, dove ε è il parametro di perturbazione (Tabor, 1989). Concettualmente si tratta di una strategia euristica analoga a quella tradizionalmente adottata per risolvere il problema dei tre corpi come problema di due corpi più una perturbazione, ma con una fondamentale differenza: proprio perché è noto il risultato limitativo generale di Poincaré e si conoscono le proprietà emergenti della non-linearità, all'approccio puramente analitico si sostituiscono considerazioni di carattere qualitativo e geometrico. Diventa dunque possibile studiare il comportamento del sistema al variare del parametro di perturbazione: per $\varepsilon = 0$ si avrà un sistema deterministico lineare, caratterizzato dalla sola presenza di ordine, mentre per $\varepsilon > 0$ si avranno zone d'ordine e zone di caos. Queste ultime aumenteranno al crescere di ε, cioè al crescere dell'instabilità.

Combinando l'approccio geometrico delle mappe di Poincaré con quello numerico che studia la presenza di uno o più esponenti λ di Lyapunov (e quindi di corrispondenti tempi caratteristici $t_\lambda = \frac{1}{\lambda}$) nelle soluzioni approssimate delle equazioni differenziali che descrivono la dinamica di un sistema non-lineare, e procedendo nell'analisi delle sue *variabili di stato* per successiva variazione dei *parametri di controllo* (opportunamente selezionati, dove la selezione operata non è indifferente rispetto alla complessità del sistema e influisce su ciò che possiamo dire del sistema stesso), è possibile trattare la non-linearità e la compresenza di ordine e caos nell'evoluzione di un sistema in modo matematicamente rigoroso, benché su basi qualitative.

FIGURA 1.2
La traiettoria interseca la sezione di Poincaré Σ nei punti Q_k e Q_{k+1}

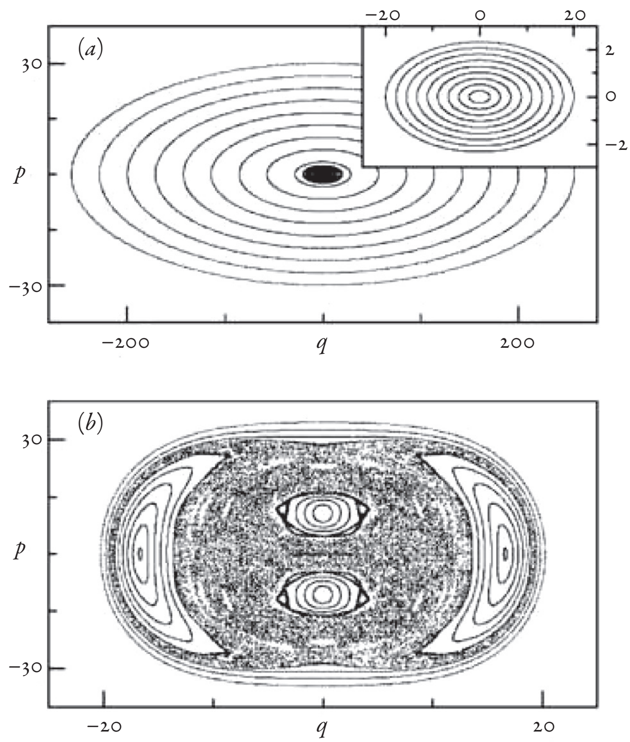


Del resto è ciò che ha consentito tra la fine del Novecento e gli inizi del XXI secolo di sviluppare software di *simulazione* dell'evoluzione dinamica di sistemi non-lineari, deterministici e stocastici (Longo, 2009).

Dall'analisi delle mappe di Poincaré (originariamente impiegate per studiare sistemi non-lineari conservativi come appunto i sistemi gravitazionali a molti corpi, ma estendibili ai sistemi dissipativi) emerge inoltre una fondamentale proprietà degli ordini emergenti associati ad *attrattori caotici* o "strani" (distinti dagli *attrattori ordinari*, regolari e periodici, che invece consentono una descrizione univoca dell'evoluzione del sistema) (Hofstadter, 1991): all'aumentare dei parametri perturbativi cresce il "mare caotico" a scapito delle configurazioni ordinate, ma ingrandendo le mappe si possono riconoscere le stesse strutture ordinate riprodotte a una scala più piccola; il loro comportamento è di tipo *frattale* e la forma degli stessi attrattori "strani" ha dimensione frazionaria, cioè frattale (a differenza degli attrattori ordinari, che hanno dimensione intera: punti, segmenti, ellissi ecc.). La *geometria dei frattali* è uno degli sviluppi più importanti e fecondi della matematica del Novecento ed è direttamente legata allo studio dei sistemi complessi e delle invarianze di scala (Jürgens, Peitingen, Saupe, 1991; Mandelbrot, 2000).

In un certo senso dunque, pur muovendo da un teorema limitativo che nega l'esistenza e la stessa possibilità di una soluzione analitica genera-

FIGURA 1.3
Esempio di mappa di Poincaré, con alternanza di regioni ordinate e caotiche



le (neppure per approssimazione) al problema dei tre corpi, e nonostante non abbia sviluppato fino in fondo le conseguenze teoriche del suo risultato (che vanno ben oltre il perimetro classico del problema di meccanica celeste più famoso e controverso dai tempi di Newton), si può dire che Poincaré abbia comunque contribuito in modo determinante ad aprire con il suo lavoro uno spazio di pensabilità/possibilità per nuovi approcci, metodi e strumenti nello studio dei sistemi dinamici non-lineari (Ceruti, 1986). Del resto è lo stesso Poincaré ad auspicare l'adozione di strumenti «assai differenti e di natura ben più complessa» per lo studio della non-linearità, che verranno effettivamente sviluppati nel corso del Novecento al fine di pervenire a una comprensione fisico-matematica più ampia e profonda dei fenomeni naturali, tale da includere nel proprio orizzonte epistemologico l'imprevedibilità, l'incertezza, la necessaria complementarità e reciproca integrazione tra metodi analitici, numerici, statistici e geometrici, tra analisi quantitativa e studio qualitativo, tra descrizione e spiegazione, nella lettura e comprensione del «libro della natura» (Cini, 1999; Kline, 1985; Prigogine, 2006, 2007; Prigogine, Nicolis, 1991; Prigogine, Stengers, 2007).

2

Il problema della previsione in un sistema deterministico classico

di *Andrea Cintio*

2.1
Introduzione

Il problema dell'evoluzione temporale si presenta ogni volta che occorre interpretare i dati che vengono da simulazioni al computer o da esperimenti e che, nel tempo, hanno riguardato una sempre più ampia varietà di fenomeni: dopo gli esordi, in cui la meccanica celeste ha rappresentato la principale fonte di problemi, sono stati introdotti modelli per lo studio delle evoluzioni nei sistemi economici, per la dinamica delle popolazioni e per le variazioni metereologiche e climatiche. Questa grande variabilità delle aree di applicazione ha portato all'introduzione di oggetti matematici e linguaggi che hanno assunto forme sempre più astratte, che hanno ispirato anche settori della matematica che non hanno, necessariamente, un interesse ad applicazioni a problemi del mondo reale.

In questo capitolo vengono esposte le idee e le nozioni elementari della teoria dei soli *sistemi deterministici*, cioè sono escluse le evoluzioni temporali in cui la probabilità è un elemento essenziale e ineliminabile (*sistemi stocastici*). Ciò che caratterizza la moderna teoria dei sistemi dinamici è il tipo di questioni che vengono affrontate.

– Quali comportamenti sono osservabili in natura?
– Cosa accade a tempi molto grandi?

La teoria della stabilità e quella delle biforcazioni forniscono gli strumenti per rispondere alle domande del primo tipo. In particolare, un punto rilevante è la "robustezza" delle proprietà qualitative della dinamica (punti fissi, orbite periodiche) rispetto a "piccoli" cambiamenti.

Il secondo tipo di questioni anima lo studio delle evoluzioni asintotiche, sia nel passato che nel futuro, quando un qualsiasi intervallo finito di evoluzione è irrilevante per determinare la "organizzazione" delle orbite nello spazio delle fasi (come, in particolare, nei sistemi dissipativi). Lo scopo è la classificazione dei comportamenti in regioni limitate, come nel caso di una traiettoria densa in una regione o di un insieme limite, e di "diffusioni" in domini illimitati.

Dopo Newton, la motivazione per l'apparato e le questioni della teoria dei sistemi dinamici sono venute, soprattutto, dallo studio delle soluzioni di un'equazione differenziale[1] (equazione del moto).

Un problema che nasce da un'equazione differenziale, diventato paradigmatico, è il tentativo di dare una veste rigorosa alla spiegazione del "pezzetto" di realtà che riguarda il moto di un sistema di più di due corpi che si attraggono l'un l'altro secondo la legge di gravitazione di Newton. Per circa duecento anni matematici di primo ordine si sono cimentati con questo problema senza giungere a una soluzione completa. Merita un particolare interesse la storia legata al problema dei tre corpi (per un esame approfondito sull'argomento cfr. il capitolo 1 di questo testo). Nonostante i progressi dei metodi perturbativi, restava aperto il problema della convergenza delle serie che rappresentano le soluzioni, gettando delle ombre sull'affidabilità delle previsioni a lungo termine e, quindi, sulla possibilità di concludere riguardo alla stabilità del sistema dei tre corpi. È in questo contesto che si inserisce la figura di Poincaré, a cui si deve insieme a Riemann l'opera di geometrizzazione della matematica. I risultati di Poincaré sul problema dei tre corpi hanno un carattere negativo e dimostrano che gli sviluppi per serie possono descrivere il moto dei pianeti solo per intervalli di tempo limitati.

La distinzione fra il *determinismo* delle equazioni del moto e la *predicibilità* delle evoluzioni temporali è alla base della teoria dei sistemi dinamici. Da questa distinzione segue l'allontanamento del concetto di *previsione* da quello di *deduzione*, legato al rapporto di causa-effetto stabilito dalle leggi naturali che ordinano il mondo dei fenomeni. La teoria dei sistemi dinamici rappresenta un percorso di liberazione da una categoria metafisica, come il rapporto di causa-effetto, per evolvere verso gli approcci più agnostici e pragmatici della modellistica matematica, dove i concetti della dinamica sono sostanzialmente ridotti alla funzione di linguaggio.

1. In questo capitolo, quando consideriamo un'equazione differenziale ci riferiamo quasi sempre a un'equazione ordinaria, anche se esistono sistemi dinamici che originano da equazioni alle derivate parziali.

2.2
Il problema dello studio delle evoluzioni temporali

Nei *Principia* (Newton, 2018) di Newton fenomeni molto diversi sono spiegati in termini di poche leggi che raccolgono le osservazioni di Keplero, Galileo e altri. Nell'opera troviamo la legge che regola il moto dei corpi celesti nella sua forma corretta, oltre all'intuizione che essa determina il moto di tutti i "corpi pesanti", indipendentemente che abbiano una natura "celeste" o siano vicini alla superficie della Terra. Tuttavia, il lascito dei *Principia* con le conseguenze più notevoli nello sviluppo successivo delle scienze in generale è stato, forse, l'aver dato forma, con la costruzione teorica in essa presentata, all'idea galileiana del linguaggio matematico come strumento irrinunciabile per esprimere le leggi fisiche e, probabilmente, anche indispensabile per pensare molti concetti della fisica (non deve, però, essere dimenticato il contributo all'evoluzione delle teorie scientifiche degli aspetti tecnici che gli autori moderni hanno attinto dai trattati ellenistici; Russo, 1996).

Il tempo è una grandezza, convenzionalmente indicata con t, che varia in modo continuo[2]. La soluzione del *problema dell'evoluzione temporale* consiste nel determinare la *dipendenza dal tempo* delle grandezze che fissano lo *stato* del sistema attraverso la soluzione delle *equazioni del moto*[3]. Il problema delle evoluzioni temporali che viene affrontato nei *Principia* deve essere inteso nel senso specifico di studio della dinamica di un sistema meccanico, ovvero della relazione fra il movimento e le sue cause (forze). Il linguaggio matematico che Newton adotta è quello della geometria euclidea. In particolare la teoria delle sezioni coniche di Apollonio di Perga è lo strumento per descrivere le orbite di corpi sottoposti all'azione di una forza che dipende dall'inverso del quadrato della distanza (forza di attrazione gravitazionale). Tuttavia, quando affronta il problema del legame tra forza e variazione del movimento, stabilito dal secondo principio della Meccanica[4], Newton sta di fatto cercando la soluzione di ciò che, con linguaggio

2. In termini più precisi il tempo è una grandezza che assume i suoi valori nell'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

3. Per essere più precisi ci si riferisce a leggi di evoluzione *deterministiche*. Quindi non sono considerate le evoluzioni *stocastiche* in cui entra in gioco la probabilità.

4. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur* – La variazione del movimento è proporzionale alla forza motrice applicata, e si verifica nella stessa direzione della linea retta lungo la quale viene impressa la forza (*Lex II* degli *Axiomata sive leges motus*) (Newton, 2018).

moderno, è detta un'*equazione differenziale*[5]. Nella soluzione di un problema di evoluzione temporale per un sistema meccanico classico[6] l'equazione differenziale è data nella ben nota forma $F = ma$, dove F è la *legge della forza* che agisce su un corpo che ha una *massa inerziale* m e un'*accelerazione* a[7]. Se F è la forza per un dato sistema allora *tutte* le soluzioni dell'equazione $F = ma$ sono moti possibili del sistema, mentre il primo principio (principio d'inerzia[8]) stabilisce che non ci sono moti del sistema che non sono soluzioni dell'equazione. Riassumendo, $F = ma$ è l'equazione del moto per un sistema meccanico classico.

Per illustrare come $F = ma$ rappresenta un'equazione differenziale, e in quale senso le sue soluzioni sono moti del sistema, consideriamo il semplice esempio di una palla che si muove lungo la direzione verticale rimbalzando su un pavimento orizzontale. Per determinare il moto della palla dopo che è stata lasciata cadere lungo la verticale occorre conoscere il suo stato a ogni istante t e questo equivale a determinare due funzioni del tempo: la *posizione* $h(t)$ all'istante t della palla rispetto al pavimento e la corrispondente *velocità* $v(t)$ allo stesso istante. La velocità è *per definizione* la derivata $\dot{h}(t)$[9] rispetto al tempo della posizione e, quindi, $\dot{h}(t) = v(t)$. Inoltre, *per definizione* l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità, ovvero $\dot{v}(t) = a(t)$. Il moto della palla è quello di un grave e, quindi, la legge della forza è il suo peso, $F = -mg$. In questo modo si ha:

$$\begin{aligned} &\dot{h}(t) = v(t) \\ &m\dot{v}(t) = -mg \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove la prima riga è la definizione di velocità, mentre la seconda è l'equazione $F = ma$ per la palla che cade. Quest'ultima è un'equazione differen-

5. A conferma di ciò si può considerare la dimostrazione della legge delle aree (Proposizione I, Teorema I della Sezione II; Newton, 2018).

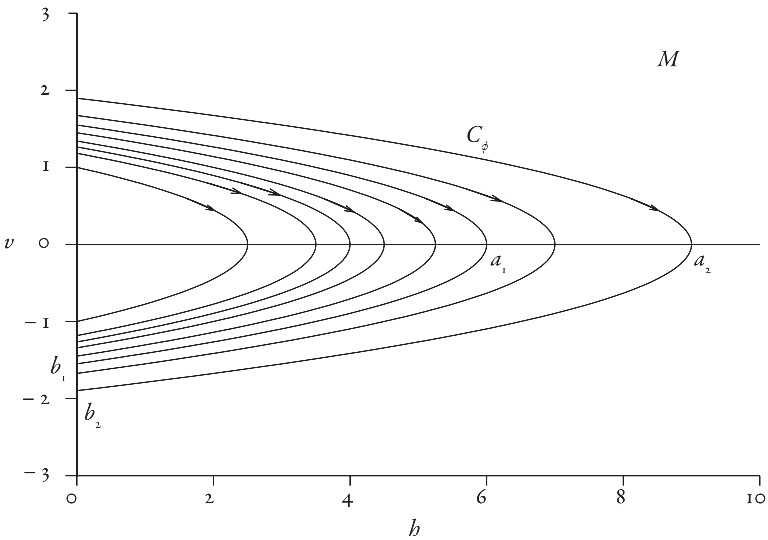
6. L'aggettivo "classico" sta a indicare che si fa riferimento alla dinamica dei *Principia*, cioè quella pre-relativistica e pre-quantistica.

7. Nei *Principia* non compare, esplicitamente, la formulazione $F = ma$. È invece lecito sostenere che essa rappresenta il contenuto della *Propositio 20* del trattato di *Meccanica* di Eulero (Euler, 1912).

8. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi unformiter in directu, nisi quatunus a viribus impressis cogitur statum illum mutare* – Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché non è costretto a mutare tale stato da una forza impressa (*Lex I*, *Axiomata sive leges motus*; Newton, 2018).

9. Seguendo l'uso introdotto da Newton, la derivata rispetto al tempo è indicata con un punto sopra la lettera della grandezza che viene derivata.

FIGURA 2.1
Ritratto di fase del sistema della palla



ziale perché mette in relazione la derivata della funzione incognita $v(t)$ con quantità note[10]. Una soluzione φ del sistema (2.1) è la coppia di funzioni $h(t)$, $v(t)$, in modo che sono note a ogni istante la posizione rispetto al pavimento e la velocità della palla.

In un piano M (cfr. FIG. 2.1) è scelto un sistema di coordinate in cui in un asse sono rappresentate le posizioni h e nell'altro le velocità v, ovvero un punto è fissato dalla coppia di numeri (h, v). Data una soluzione φ di (2.1) il corrispondente moto è rappresentato in M da una curva C_φ che si ottiene come il luogo di punti che hanno come coordinate la posizione e la velocità della palla allo stesso istante, cioè $(h(t), v(t))$, per tutti i tempi t in cui avviene il moto.

Il piano M è lo *spazio delle fasi* delle equazioni (2.1) e la curva C_φ che rappresenta il moto φ è chiamata l'*orbita* di φ. Nella figura 2.1 su ogni curva

10. In generale l'equazione $F = ma$ di un sistema stabilisce una relazione fra $\dot{v}(t)$ all'istante t e le variabili posizione e velocità che definiscono lo stato del sistema allo stesso istante.

la freccia indica il verso in cui essa viene percorsa quando il tempo scorre in senso positivo; le velocità positive corrispondono alla palla che sale. In ognuno dei moti, rappresentati dalle curve della figura, si parte dal terreno (livello $h = 0$) e l'altezza massima che può essere raggiunta in un moto corrisponde all'intersezione della curva del moto con l'asse orizzontale (per esempio i punti a_1 e a_2), quando la velocità è nulla. Dopo che è stata raggiunta l'altezza massima la velocità è negativa e questo sta a indicare la discesa della palla che avviene fino a quando la palla rimbalza sul terreno (punti b_1, b_2) con la stessa velocità con la quale essa era stata lanciata da terra, ma con il segno della velocità cambiato. Le curve della figura 2.1 sono parabole il cui asse coincide con l'asse delle ascisse. Queste curve non vanno confuse con le traiettorie paraboliche di un grave (proiettile) lanciato da terra. Quest'ultimo è un moto che avviene in un piano, mentre il moto della palla è lungo una retta.

È importante osservare che quando viene tracciata la curva C_φ è implicitamente assunta l'esistenza della soluzione φ delle equazioni (2.1). Disegnata la curva C_φ, ci chiediamo se un suo punto può appartenere alla curva di un moto φ' diverso da φ. In altri termini, vogliamo capire se esistono stati della palla a partire dai quali non è possibile stabilire univocamente il moto seguito dalla palla. Dalla teoria delle equazioni differenziali (Arnold, 1979; Verhulst, 1996) è noto che se sono soddisfatte certe condizioni è garantita l'*esistenza* e l'*unicità* del moto di un sistema che si trova in un certo stato (posizione e velocità) in un certo istante (*condizioni iniziali*)[11]. Per questa proprietà si dice che la dinamica è *deterministica*. Le condizioni di esistenza e unicità sono, in generale, soddisfatte dalle equazioni del moto che caratterizzano le evoluzioni di un sistema della fisica. Rispetto alla rappresentazione nello spazio delle fasi ciò si traduce nella proprietà che per ogni punto P di M passa una (esistenza) e una sola (unicità) orbita[12]. Le curve di fase dell'equazione (2.1) non possono intersecarsi e costituiscono, tutte insieme, un fascio che occupa completamente, senza lasciare interstizi vuoti, lo spazio M. La famiglia di tutte le orbite dell'equazione è chiamato il *ritratto di fase* dell'equazione.

L'approccio attraverso il ritratto di fase permette di estrarre il contenuto dell'equazione differenziale che può essere trattato con metodi geome-

11. Occorre precisare che il teorema di esistenza e unicità si applica alle equazioni *autonome*, cioè quelle che, come la (2.1), non hanno al secondo membro il tempo come variabile esplicita. Comunque, un qualsiasi sistema di equazioni non autonomo può essere trasformato in uno autonomo.

12. Inoltre, l'istante $t = 0$ può essere scelto in modo che P rappresenti lo stato iniziale, ovvero che le sue coordinate siano le condizioni iniziali del moto.

trici. Questi forniscono le *proprietà qualitative* che riguardano famiglie di soluzioni. Le equazioni differenziali per le quali è possibile ottenere formule esplicite per le soluzioni rappresentano una classe ristretta. Al contrario i metodi qualitativi, poiché non richiedono il calcolo esplicito delle soluzioni, possono essere applicati a una classe estesa di equazioni differenziali. A questo riguardo, un cenno particolare merita l'esempio del *problema degli n corpi*, con *n* più grande di due, il cui studio ha dato lo spunto per il nuovo approccio (Diacu, Holmes, 1996). Il resto del capitolo sarà una rassegna essenziale e non tecnica dei metodi dell'analisi qualitativa che si devono in gran parte alle ricerche di Poincaré[13] e che costituiscono l'arsenale della *teoria dei sistemi dinamici*.

2.3
Sistema dinamico

A differenza dei sistemi meccanici semplici, come nell'esempio della palla che cade, per i sistemi complessi che si studiano in discipline come l'economia, la chimica, la biologia, la fluidodinamica non è disponibile una teoria per ottenere dalla dinamica fondamentale (equazione $F = ma$, equazione di Schrödinger) le equazioni del moto *esatte* per le "osservabili di interesse". In questi casi si costruisce un *modello* per il sistema; ciò consiste nell'assumere un'equazione del moto, formulata a partire da dati noti, per una *variabile* che è scelta in funzione del fenomeno che si vuole studiare e che definisce lo stato del sistema. La forma dell'equazione e la scelta della variabile non sono universali come nel caso dei sistemi meccanici. Tuttavia, come per questi ultimi, i metodi della teoria dei sistemi dinamici si possono applicare a un qualsiasi modello poiché esso è definito da un'equazione del moto per lo stato del sistema.

Un *sistema dinamico* è la veste astratta con la quale viene presentato un modello o un sistema meccanico quando l'attenzione non è rivolta ai moti singoli ma al comportamento d'insieme delle orbite in un certo spazio matematico. Come è stato osservato in precedenza, una proprietà essenziale per tracciare le orbite, e quindi nella definizione di un sistema dinamico, è il determinismo: dallo stato attuale (posizione e velocità) si devono poter

13. La scelta di privilegiare i metodi geometrici è implicita nel programma esposto da Poincaré all'inizio (Poincaré, 1881): «costruire le curve definite da un'equazione differenziale».

ricostruire tutti gli stati futuri e tutti quelli passati. Un sistema dinamico definito a partire da un'equazione differenziale è per il teorema di esistenza e unicità deterministico.

Un sistema dinamico è una struttura definita da:

– uno spazio M, detto spazio delle fasi, in cui i moti del sistema sono descritti da curve dette orbite o *traiettorie di fase*. Un'orbita viene percorsa nel tempo dal punto che, a ogni istante, rappresenta lo stato del sistema. Nell'esempio della palla lo spazio M è il piano e un punto di M è la coppia (h, v) che rappresenta lo stato della palla che si trova ad altezza h con velocità v;

– un'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

dove x è la variabile che rappresenta lo stato, cioè le coordinate di un punto di M. Nell'equazione le derivate rispetto al tempo delle coordinate si trovano a sinistra del segno di uguaglianza. La (2.2) è detta equazione del moto del sistema dinamico; nell'esempio della palla essa è la (2.1).

Per ogni punto x dello spazio delle fasi $f(x)$ rappresenta un vettore (una freccia) applicato in x, la cui lunghezza e la cui direzione sono, rispettivamente, la velocità di variazione dello stato x e la corrispondente direzione di variazione. In altri termini, per ogni punto x il vettore $f(x)$ è tangente alla curva di fase che passa per il punto x. Alla funzione $f(x)$ è dato il nome di *campo vettoriale* del sistema dinamico. Le frecce nella figura 2.1 appartengono al campo vettoriale dell'esempio della palla.

Per imbastire una teoria interessante è necessario poter stabilire la "vicinanza" fra due qualsiasi stati, e questo richiede che nello spazio M sia definita una *distanza*[14]. Esempi di spazio delle fasi sono la retta R, il piano R^2, lo spazio R^3 e, in generale, gli spazi R^n con la dimensione n fissata dal numero di *gradi di libertà* del sistema[15]. Inoltre, se devono essere soddisfatte particolari condizioni (come la presenza di vincoli o il fatto che alcune quantità conservano durante il moto il loro valore iniziale[16]), allora lo spa-

14. Assegnata una distanza si possono definire quei particolari sottoinsiemi di M, che sono dati per ogni stato x dalle sferette con centro in x e di raggio piccolo a piacere. Si dice che in M è definita una *topologia* e le sferette di centro x sono dette gli *intorni* di x.

15. R^n è lo *spazio vettoriale* standard di dimensione n.

16. Nei sistemi meccanici le quantità conservate possono essere l'energia, la quantità di moto, il momento angolare.

zio delle fasi è un sottoinsieme[17] di uno spazio di tipo R^n; in particolare, ci sono esempi di sistemi il cui spazio delle fasi è una superficie di R^3, come la *sfera* S^2, il *cilindro* e il *toro* T^2, che è la figura ottenuta dalla rotazione di una circonferenza intorno a una retta che si trova nel piano della circonferenza senza che la intersechi (cfr. FIG. 2.5*c*). In questi casi il campo vettoriale $f(x)$ è tangente alla superficie, essendo tangente alla curva di fase che passa per x e che giace sulla superficie.

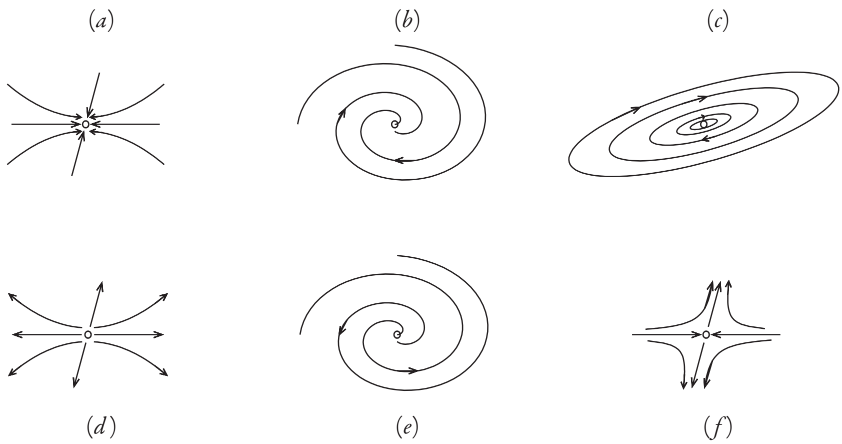
2.3.1. PUNTI FISSI DI UN CAMPO VETTORIALE, MOTI PERIODICI E SEPARATRICI

Un'equazione differenziale può avere delle particolari soluzioni la cui curva di fase è un unico punto x_0. In altri termini, lo stato del sistema non deve cambiare nel tempo e, quindi, deve essere nullo il vettore $f(x_0)$ del campo vettoriale nel punto x_0, poiché esso misura la velocità di variazione dello stato x_0: $f(x_0) = 0$. Uno stato dello spazio delle fasi in cui si annulla il campo vettoriale è detto *punto fisso*, o *punto critico* del campo vettoriale $f(x)$. Se in particolare consideriamo un sistema meccanico costituito da una particella, i suoi punti fissi sono le eventuali soluzioni che rappresentano la particella ferma in una certa posizione. Nell'esempio della palla l'origine del sistema di coordinate della figura 2.1 è un punto fisso. Nella figura 2.2 sono mostrati vari casi di punti fissi che si possono presentare nello studio di un sistema con uno spazio delle fasi a due dimensioni; essi si distinguono per l'organizzazione delle traiettorie nelle vicinanze dei punti fissi. In generale, un punto fisso non corrisponde alla condizione di "essere fermo". Per esempio, in fluidodinamica lo stato di un fluido incompressibile è descritto assegnando in ogni punto la velocità del fluido; il *moto laminare* è un punto critico *dell'equazione di Navier-Stokes*, che è la legge che regola l'evoluzione dello stato del fluido.

Un moto *periodico* di un sistema dinamico è una soluzione dell'equazione differenziale la cui orbita nello spazio delle fasi è una curva *chiusa*. La proprietà che definisce un moto periodico è il fatto che se T è l'intervallo di tempo necessario allo stato del sistema x per percorrere l'orbita chiusa, allora lo stato $x(t)$, a un qualsiasi istante t, e lo stato $x(t + T)$ sono rappresentati dallo stesso punto sull'orbita: $x(t) = x(t + T)$ per ogni istante t. L'intervallo T è detto il *periodo* del moto.

17. Il termine matematico corretto è *varietà differenziale*.

FIGURA 2.2
Esempi di vari tipi di punti fissi in uno spazio delle fasi bidimensionali: (*a*) nodo stabile, (*b*) fuoco stabile, (*c*) centro, (*d*) nodo instabile, (*e*) fuoco instabile, (*f*) punto di sella



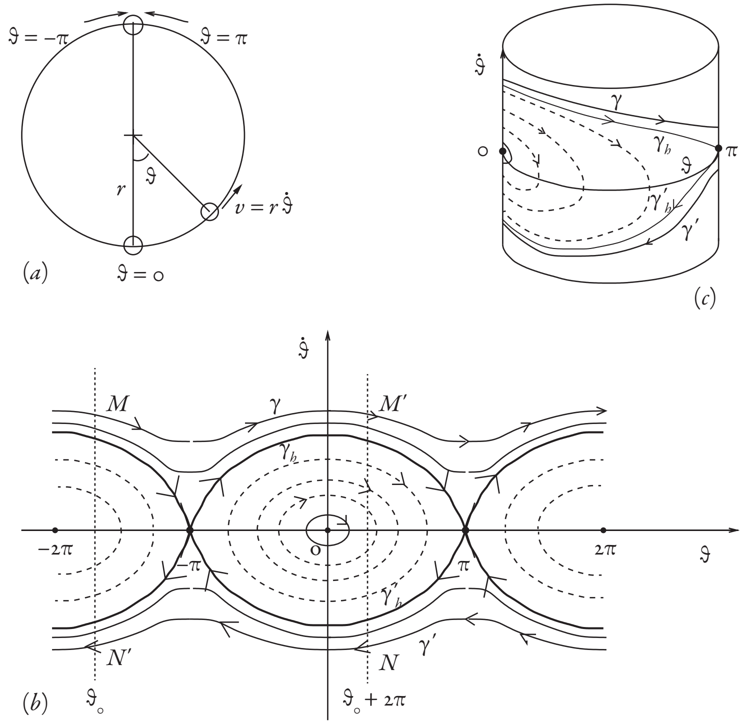
Il ritratto di fase di un *pendolo piano libero* è particolarmente illustrativo. Questo sistema è costituito da un'asticella rigida, di massa trascurabile, che oscilla senza attrito in un piano verticale intorno a un suo estremo e che porta fissa all'altro estremo una massa puntiforme (cfr. FIG. 2.3*a*). La particella si muove lungo una circonferenza il cui raggio è la lunghezza dell'asticella. Lo stato nello spazio delle fasi è dato dall'angolo ϑ che fissa la posizione della particella lungo la circonferenza e dalla velocità angolare $\dot{\vartheta}$ che, a sua volta, è legata alla velocità tangenziale v. Se si introduce la variabile $x = r\,\vartheta$, l'equazione del moto del pendolo libero assume la forma (2.2)

$$\dot{x} = v \qquad (2.3)$$
$$\dot{v} = f(x)$$

Le orbite del pendolo sono mostrate nella figura 2.3*b*.

Sappiamo che quando lasciamo la massa ferma, cioè con la velocità $v = 0$, nella posizione più bassa, essa vi rimane a meno che non interveniamo con una spinta che la metta in moto.

FIGURA 2.3
Pendolo piano libero (*a*) e il suo ritratto di fase nel piano (*b*) e sul cilindro (*c*)



La corrispondente orbita nello spazio delle fasi è il punto fisso $\vartheta = 0$, $\dot\vartheta = 0$, cioè l'origine *O* del sistema delle coordinate.

Quando spostiamo la particella verso destra ($\vartheta > 0$) o verso sinistra ($\vartheta < 0$) rispetto alla posizione più bassa fino a un angolo più piccolo di 180°, cioè di π radianti, e la lasciamo poi cadere, osserviamo che all'inizio la particella accelera, passa per la posizione $\vartheta = 0$ e poi rallenta fino a fermarsi allo stesso livello della posizione iniziale dalla parte opposta (questo è vero per un modello ideale di pendolo in cui sono assenti gli attriti). In seguito la particella ripercorre lo stesso arco di circonferenza ma con le velocità invertite, e alla fine torna con velocità nulla nella posizione iniziale. Da qui il ciclo ricomincia e si ripete uguale a sé stesso, senza interruzione. Quella appena descritta è una soluzione periodica rappresentata nel ritratto di fase della figura 2.3*b* da una delle curve chiuse, tratteggiate[18], che girano intorno all'origine *O*.

Quando alla particella viene data una spinta intensa in modo che essa acquisti una velocità sufficiente a raggiungere il vertice della circonferenza e a valicare dall'altra parte, allora la particella non può invertire il suo moto e percorre l'intera circonferenza senza mai fermarsi, alternando ripetute fasi di accelerazione e decelerazione. Questo moto è rappresentato nel ritratto di fase da una delle linee continue, con il tratto meno marcato, che si trovano sia sopra (rotazioni in senso antiorario) che sotto (rotazioni in senso orario) l'asse delle ascisse (asse delle ϑ) e che hanno un andamento oscillante, ma non tale da permettere loro di raggiungere l'asse ϑ, perché questo si verifica solo quando la velocità della particella si annulla.

A prima vista, questo secondo tipo di moto sembrerebbe non periodico. In realtà dal fatto che ϑ è un angolo segue che devono essere pensate coincidenti due posizioni che distano fra loro un numero intero di giri, ovvero un angolo uguale a $2\pi k$ radianti, per un numero intero k.

Consideriamo una qualsiasi delle orbite della figura 2.3*b* che corrispondono ai moti che non si invertono e, in particolare, quella a cui appartengono i punti M ed M'. Per raggiungere la posizione di M' partendo da M il pendolo percorre una intera circonferenza e quindi, per quello che è stato detto, M ed M' corrispondono alla stessa posizione sulla circonferenza. La proprietà qualificante è il fatto che M ed M' *hanno anche la stessa velocità*. In conclusione, M ed M' sono lo *stesso* stato e, quindi, sono punti coincidenti nello spazio delle fasi. La stessa proprietà è verificata anche per la coppia di punti N ed N' e, in generale, per tutte le coppie di punti della figura 2.3*b* che si ottengono dalle intersezioni con una data orbita di coppie di rette parallele all'asse delle ordinate che distano 2π l'una dall'altra, come le rette ϑ_0 e $\vartheta_0 + 2\pi$. Per esplicitare questa proprietà possiamo modificare lo spazio delle fasi nel modo seguente. Si taglia il piano della figura 2.3*b* lungo le rette ϑ_0 e $\vartheta_0 + 2\pi$ e si sovrappongono i due lembi ottenuti in modo da far coincidere tutte le coppie di punti corrispondenti e, in particolare, M con M' e N con N'. In questo modo il ritratto di fase viene a ricoprire la superficie di un cilindro (cfr. FIG. 2.3*c*). Le rappresentazioni sul piano e sul cilindro sono equivalenti. Tuttavia nello spazio delle

18. La rappresentazione analitica, in forma implicita, per ognuna delle curve chiuse con centro il punto fisso *O* è un *integrale ellittico* (Siegel, 1969).

fasi del cilindro anche le orbite dei moti senza inversione (tutte quelle del tipo di γ e γ') sono linee *che si chiudono* dopo aver descritto un giro intorno all'asse del cilindro. Questo è consistente con il fatto che queste soluzioni delle equazioni del moto sono periodiche.

Nella rappresentazione sul cilindro si possono mettere in evidenza delle proprietà geometriche da cui si coglie la differenza fra i due tipi di moti periodici (cioè i moti rappresentati da linee chiuse sia sul piano che sul cilindro e quelli che sono descritti da orbite chiuse solo sul cilindro). Supponiamo di poter imporre a un'orbita una qualsiasi deformazione che non comporti lacerazioni dello spazio delle fasi, tagli dell'orbita e distacco dalla superficie dello spazio delle fasi, ovvero di poter operare sull'orbita con una qualsiasi trasformazione *continua*[19]. Data una coppia qualsiasi di orbite periodiche dello stesso tipo, è sempre possibile deformare con una trasformazione continua una delle due orbite in modo da portarla a sovrapporsi all'altra. Al contrario questo non è vero quando le due orbite sono di tipo diverso; infatti una delle due si chiude avvolgendosi intorno all'asse del cilindro, e quindi è necessario aprirla in un punto per svincolarla dall'asse e farla sovrapporre all'altra orbita. Nella trasformazione dalla rappresentazione della figura 2.3*b* a quella della figura 2.3*c* la semplice connessione non è, in generale, una proprietà conservata.

Il confine fra le regioni occupate dai due tipi diversi di moti periodici è segnato da due orbite che nella figura 2.3*b* sono rappresentate da linee con il tratto più marcato. Ciascuna di queste orbite unisce i due punti dello spazio delle fasi che hanno velocità nulla con il pendolo verso l'alto (*pendolo rivoltato*), che nella figura 2.3*a* corrispondono alle posizioni $\vartheta = -\pi$ e $\vartheta = \pi$. In questi due punti il campo vettoriale si annulla, ovvero essi sono punti fissi, ma di tipo diverso rispetto a O. Infatti, intorno a O ci sono solo orbite periodiche, mentre quelle con il tratto più marcato non sono orbite periodiche. Una traiettoria di fase che inizia in un punto fisso e termina in un altro è detta *eteroclina*. Il pendolo nel moto lungo un'orbita eteroclina impiega intervalli di tempo infinitamente lunghi per allontanarsi e avvicinarsi rispetto alla posizione verticale. Si capisce che le condizioni per un moto eteroclino sono eccezionali, mentre a essere comuni sono i moti periodici. Di regola, nella teoria dei sistemi dinamici i "moti eccezionali" sono importanti perché separano regioni di moti comuni di tipo diverso.

19. Con un minimo di precisazione matematica, la trasformazione è invertibile e continua insieme alla sua inversa. Una trasformazione con queste proprietà è chiamata *omeomorfismo*.

2.3.2. EVOLUZIONI TEMPORALI MULTI-PERIODICHE E QUASI-PERIODICHE

Nel pendolo libero i moti sono nella quasi totalità periodici, ciascuno descritto da un angolo. Nell'evoluzione temporale il punto che rappresenta lo stato del sistema procede lungo un'orbita periodica (linea chiusa) con una velocità che non è costante. Tuttavia è sempre possibile trovare un opportuno cambiamento di coordinate tale che il moto periodico possa essere descritto da un moto uniforme sulla circonferenza S^1. In altri termini, per la rappresentazione di un moto periodico avente un periodo T la variabile angolare può essere sostituita in modo che lo stato al tempo t assuma la forma:

$$x(t) = x_0 + \frac{2\pi}{T} t \tag{2.4}$$

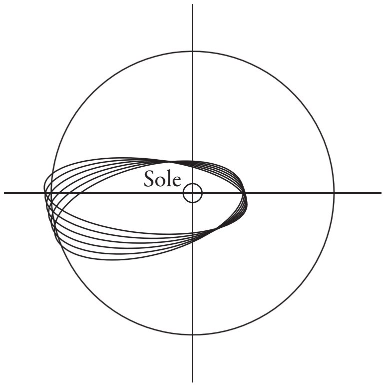
dove x è l'angolo che fissa la posizione sulla circonferenza al tempo t, x_0 è lo stato iniziale. Quindi, a parte le orbite eterocline, un generico moto di un pendolo è descritto da un moto uniforme su una circonferenza con un periodo opportuno.

La rivoluzione di un pianeta intorno al Sole è un altro esempio di moto periodico; la periodicità di un moto planetario è un corollario delle prime due *leggi di Keplero*[20]. Tuttavia, il contenuto delle leggi di Keplero rappresenta solo una "prima approssimazione" della teoria della gravitazione di Newton, in cui si trascura l'influenza sul moto di un pianeta dovuta alla presenza degli altri. Per un pianeta del Sistema solare l'errore legato alla cinematica kepleriana è in generale molto piccolo. Comunque, una teoria meno approssimata[21] mostrerebbe una deviazione del moto planetario dall'orbita ellittica dovuta alla rotazione dell'asse maggiore dell'orbita (cfr. FIG. 2.4) di un angolo estremamente piccolo (una piccola frazione di secondo di arco per ogni rivoluzione completa del pianeta). La rotazione dell'asse è chiamata *pre-*

20. Nella prima legge si enuncia che ogni pianeta percorre un'orbita ellittica e il Sole occupa uno dei fuochi. Per la seconda legge è costante la velocità areolare del pianeta, cioè l'area spazzata nell'unità di tempo dal segmento congiungente il pianeta al Sole. Nelle tre leggi di Keplero sono condensati anni di calcoli e confronti che l'astronomo tedesco ha sviluppato usando la mole di dati frutto delle osservazioni dell'astronomo Tycho Brahe.

21. Risultati notevoli nell'approccio al problema a n-corpi della meccanica newtoniana sono stati ottenuti grazie alla teoria classica delle perturbazioni che ha inizio da Laplace e Lagrange, ai potenti strumenti che si trovano nei lavori di Poincaré (1993), alla moderna teoria delle perturbazioni dei sistemi integrabili (teoria KAM).

FIGURA 2.4
Orbita di un pianeta intorno al Sole con la precessione del perielio



cessione del perielio. In questa approssimazione, il moto del pianeta è la composizione di due moti periodici che hanno periodi molto differenti: il moto di rivoluzione del pianeta sulla "quasi-ellisse"[22] e la precessione del perielio.

Consideriamo un altro sistema che presenta dei moti composti da due moti periodici. Esso è costituito dal pendolo a cui è applicata una forza $g(\frac{t}{T_2})$ dipendente dal tempo, periodica con un periodo T_2. Questo sistema, chiamato *pendolo forzato*, ha l'equazione del moto che si ottiene aggiungendo il termine della forza esterna e una nuova coordinata $z = \frac{t}{T_2}$ all'equazione (2.3) del pendolo libero:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= f(x) + \varepsilon\, g(z) \\ \dot{z} &= \frac{1}{T_2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Lo spazio delle fasi dell'equazione (2.5) è R^3, ovvero il pendolo forzato è un sistema a tre dimensioni. In questo contesto alla costante ε, che fissa l'intensità della forza esterna, si assegna un valore piccolo rispetto a 1. La periodicità della funzione g è 1 rispetto a z, cioè $g(z)= g(z + 1)$; quindi z è

22. Il periodo è dato dall'intervallo fra due passaggi successivi per il punto più distante dal Sole.

una variabile di tipo angolare ed è sufficiente che essa assuma i suoi valori in un intervallo di ampiezza 1.

Quando si pone $\varepsilon = 0$ l'equazione (2.5) rappresenta un oscillatore libero rispetto alle variabili x e v, mentre la variabile z descrive un moto periodico di periodo 1. In realtà conosciamo già la soluzione di questo problema: fissata la condizione iniziale, il moto del sistema (2.5) è la combinazione del moto periodico del pendolo libero (a parte i casi eccezionali dell'orbita eteroclina e dei punti di equilibrio) e del moto lungo l'asse z che è periodico data la periodicità di g.

Un'orbita planetaria con la precessione del perielio e un moto del pendolo forzato con $\varepsilon = 0$ sono esempi di un tipo di moto chiamato *due volte periodico*. Esso è la combinazione di due moti periodici $x_1(t)$ e $x_2(t)$, analoghi a (2.4) del pendolo libero e aventi periodi T_1 e T_2 in generale diversi. Anche se a una prima impressione il sistema (2.5) possa apparire accademico[23] come esempio di moto doppiamente periodico, tuttavia, quando si considera ε diverso da 0 e piccolo rispetto a 1, esso rappresenta un'applicazione elementare della teoria Kolmogorov-Arnold-Moser (teoria KAM), sulla base della quale si studiano i sistemi con più periodi che sono "debolmente perturbati" (Arnold, 1988b).

Un altro esempio di evoluzione temporale in cui si combinano due periodi è il problema della previsione dei moti annuali (e quindi dell'alternarsi delle stagioni) a partire dal moto diurno. Nella storia l'introduzione di un "calendario" è stata la soluzione (approssimata) che le civiltà più varie hanno dato a questo problema (Linton, 2004).

Da questi esempi e dalla loro rilevanza rispetto alla teoria delle perturbazioni si apprezza l'utilità di un approfondimento riguardo ai moti composti da più moti periodici. Per semplicità ci limitiamo ai moti doppiamente periodici definiti dalla combinazione di $x_1(t)$ e $x_2(t)$, che sono periodici aventi, rispettivamente, periodo T_1 e T_2.

Estendendo il procedimento applicato al pendolo, si possono trovare dei cambiamenti di variabile attraverso i quali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ assumono la forma di moti uniformi su due circonferenze e con gli stessi periodi dei corrispondenti moti originari:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_{10} + \frac{2\pi}{T_1} t \\
x_2(t) &= x_{20} + \frac{2\pi}{T_2} t
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

23. Per $\varepsilon = 0$ il sistema (2.5) è un "finto pendolo forzato" per il quale la variabile z è superflua.

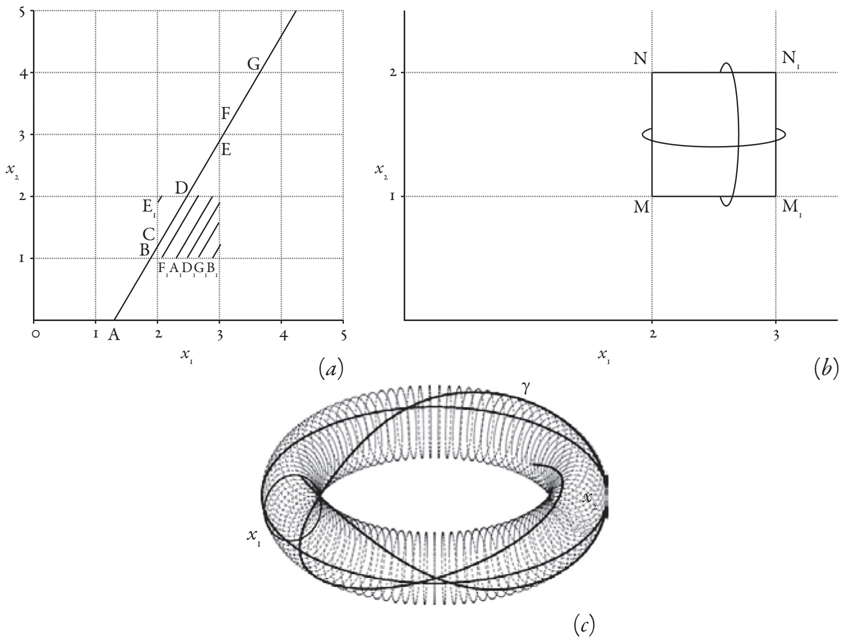
Un sistema che presenta dei moti due volte periodici deve avere uno spazio delle fasi di almeno quattro dimensioni (due posizioni più due velocità). Tuttavia, lo studio dei soli moti doppiamente periodici è possibile all'interno di uno spazio a due dimensioni. Infatti, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ possono essere rappresentati sugli assi di un sistema cartesiano di R^2 (cfr. FIG. 2.5*a*). Il luogo dei punti che rappresentano gli stati del moto C, composizione di $x_1(t)$ e $x_2(t)$, è la retta AG della figura. Il coefficiente angolare della retta è il rapporto T_1/T_2 dei periodi.

Suddividiamo il piano cartesiano della figura con una rete di "cellette" quadrate di lato 1. La retta AG taglia la rete nei punti A, B, C, D, E, F, G. Questi punti delimitano i segmenti dell'orbita C, tagliati dalle cellette attraversate dall'orbita. Traslare una celletta per farla sovrapporre a un'altra equivale a cambiare le condizioni iniziali del tratto di orbita contenuto nella celletta. Essendo interessati alle proprietà del moto (2.6) che non dipendono dalle particolari condizioni iniziali, è possibile traslare le cellette e, quindi, spostare tutti i segmenti dell'orbita contenuti nelle infinite cellette che essa attraversa in un'unica celletta. Questo è stato fatto nella figura 2.5*a* "riducendo" l'orbita C alla celletta di vertici (2, 1), (3, 1), (3, 2) e (2, 2), facendo coincidere il punto A con A_1, B con B_1, e così via. La regola è che due punti vengono portati a coincidere quando le loro coordinate omologhe differiscono di un intero.

Secondo questa regola anche i lati opposti di una celletta possono essere sovrapposti (cfr. FIG. 2.5*b*). Facendo coincidere MN e M_1N_1 si ottiene un cilindro le cui circonferenze di base sono i lati MM_1 e NN_1. Alla fine, facendo sovrapporre anche questa seconda coppia di lati ci si riduce a una superficie "a ciambella" che in topologia è chiamata *toro*. Poiché le operazioni che tasformano una cella elementare in un toro sono continue le due superfici possono essere pensate equivalenti nello stesso senso in cui lo sono un tratto di ampiezza 2π rispetto a ϑ del ritratto di fase del pendolo semplice della figura 2.3*b* e la rappresentazione della figura 2.3*c*.

Se la celletta che viene trasformata in un toro è quella in cui è stato "compresso" il moto doppiamente periodico, allora ancora per la regola precedente, i vari segmenti dell'orbita vengono a "incollarsi" agli estremi, rispettando la successione temporale, ricomponendo una curva continua che si avvolge sulla superficie del toro. In definitiva, la rappresentazione naturale della combinazione dei moti (2.6) si ha sulla superficie di un toro T^2 (cfr. FIG. 2.5*c*). La curva γ è l'orbita sul toro ottenuta dalla composizione dei moti (2.6) e corrispondente a una retta C nel piano il cui coefficiente angolare è il rapporto dei periodi.

FIGURA 2.5
Moto due volte periodico sul piano e sul toro T^2



Quando un moto due volte periodico è periodico? La risposta alla domanda è positiva quando si verifica che la corrispondente curva γ sul toro è chiusa. La curva γ si chiude quando nel tempo in cui si percorre un numero intero q di volte il meridiano x_1 si riesce a completare un numero intero p di cicli lungo l'equatore x_2. Questo è equivalente alla proprietà $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, cioè la curva si chiude quando il rapporto fra i periodi T_1 e T_2 è un numero razionale. Questa è chiamata *condizione di risonanza*. Se al contrario il rapporto $\frac{T_1}{T_2}$ è un numero irrazionale allora l'orbita γ non può chiudersi e il moto doppiamente periodico non è periodico. In questo caso si dice che il moto è *quasi-periodico*.

L'orbita di un moto quasi-periodico, non potendosi chiudere, occupa la superficie del toro ricoprendola in modo *denso*[24] (Arnold, 1988b). Questo significa che scelto un qualsiasi punto sul toro, l'orbita quasi-periodica passa vicina al punto quanto si vuole, a patto che si aspetti un tempo sufficientemente lungo.

Per sistemi più complessi ci possono essere delle evoluzioni che si scompongono in più di due moti periodici. La caratterizzazione matematica di queste evoluzioni non richiede alcuno strumento in più rispetto ai sistemi più semplici. Anche in quel caso ci si riduce a studiare orbite che si ottengono da più di due rotazioni uniformi analoghe alla (2.4) e che si avvolgono su tori che sono immersi in spazi con più di quattro dimensioni. Come nel caso bidimensionale questi moti, che sono chiamati *multi-periodici*, possono essere o periodici o quasi-periodici.

Quindi, ogni volta che si ritiene adeguata un'approssimazione per la quale nello studio della dinamica di un sistema è sufficiente limitarsi ai moti multi-periodici, allora la superficie di un toro è l'ambiente della descrizione. Come vedremo nel prossimo paragrafo, anche nel caso quasi-periodico, quando l'orbita si sviluppa lungo linee molto complicate che si disegnano in modo denso sulla superficie del toro, non esistono comunque seri limiti alla possibilità di previsione dell'evoluzione.

Tuttavia, quando si supera un certo intervallo temporale, si possono presentare delle criticità nella verifica delle condizioni per le quali una certa approssimazione può essere applicata. Questo è probabilmente il caso dell'approssimazione di moto doppiamente periodico per l'orbita planetaria con la precessione del perielio. Fino a quando è ancora trascurabile l'errore dovuto all'approssimazione, o l'orbita del pianeta si chiude, richiedendo per questo anche molti periodi del moto ellittico, o il moto è quasi-periodico e l'orbita del pianeta non si chiude e ricopre densamente la superficie del cerchio della figura 2.4, richiamando la densità dell'orbita γ sulla superficie del toro. Ad ogni modo, su scale temporali più lunghe ci saranno degli effetti dovuti alle mutue attrazioni fra i pianeti, che sono trascurati nell'approssimazione del moto doppiamente periodico. Quali sono le conseguenze di questi effetti? La risposta a questa domanda è legata a doppio filo al problema della stabilità del Sistema solare. A questo punto si possono presentare due scenari. Nel primo le perturbazioni, ovvero le interazioni trascurate, non distruggono il carattere quasi-periodico del moto; se le perturbazioni sono sufficientemente piccole, l'unica loro conseguenza è che i tori, su cui giacciono le orbite, sono "leggermente de-

24. In termini più precisi la traiettoria è *ovunque* densa sulla superficie del toro.

formati”. Nel secondo scenario le piccole perturbazioni hanno conseguenze i cui effetti tendono ad accumularsi. In questo caso il moto quasi-periodico cambia verso forme più irregolari e instabili; in particolare, il pianeta può essere catturato da pianeti più massivi, o può essere “catapultato” al di fuori del Sistema solare e la sua orbita diventare illimitata. Questa caratterizzazione degli scenari possibili è una parte del teorema KAM (Arnold, 1988b), il cui contributo significativo consiste sia nell’individuare le zone di instabilità dove i moti multi-periodici, ovvero i tori, vengono distrutti dalla perturbazione che nel fornire una stima del volume occupato da queste zone rispetto all’intensità della perturbazione.

Nell’esempio del “finto pendolo forzato” tutti i moti sono multi-periodici. Perturbare questo sistema significa sollecitare il pendolo con una forza esterna di intensità molto piccola. Anche in questo caso, per il teorema KAM si conclude che per quanto la forza possa essere piccola ci sono dei moti multi-periodici che subiscono una trasformazione verso forme più irregolari e instabili.

2.4
Il determinismo e il problema delle previsioni delle evoluzioni

Per determinare un’evoluzione temporale è necessario risolvere l’equazione del moto, ovvero conoscere per ogni istante t l’evoluto $x(t)$ a quell’istante per ogni stato iniziale x. Insieme a x fissiamo un secondo stato y, distante δ_0 da x, che scegliamo come dato iniziale per un secondo moto $y(t)$; per ogni istante t δ_t è la distanza fra gli stati evoluti $x(t)$ e $y(t)$. Per la teoria delle equazioni differenziali ordinarie[25] (Arnold, 1979; Verhulst, 1996) sappiamo che esiste una certa funzione del tempo $c(t)$ per la quale

$$\delta_t < c(t)\delta_0 \tag{2.7}$$

Questo risultato è alla base del determinismo dei fenomeni evolutivi che sono retti da equazioni differenziali. Infatti, interpretando δ_0 e δ_t come l’indeterminazione, rispettivamente, sullo stato iniziale e su quello al tempo t, dalla (2.7) segue che lo stato *a un certo tempo t* si può conoscere con una precisione in linea di principio arbitraria, a condizione di osservare

25. Ci riferiamo al teorema di differenziabilità della soluzione rispetto alla condizione iniziale.

in modo sufficientemente preciso lo stato iniziale. Portando alle estreme conseguenze questo punto di vista si arriva alla concezione laplaciana del determinismo classico (Laplace, 1967a): in linea di principio tutto il futuro e tutto il passato possono essere previsti in modo esatto se si conosce in modo perfetto il dato iniziale.

Questo approccio al problema della previsione di un'evoluzione, pur essendo corretto, rischia di essere poco interessante, se non fuorviante. Da una parte va tenuto presente che, nella pratica della misura, lo stato iniziale può essere conosciuto solo approssimativamente. Ma ancora più cruciale è il fatto che nell'approccio alla Laplace si trascura il modo in cui $c(t)$ dipende dal tempo. Nei casi in cui ci sia una crescita molto forte la capacità di previsione viene sostanzialmente ridotta; infatti, non potendo portare a zero l'errore iniziale δ_0, tenendo presente la stima contenuta nella (2.7), l'indeterminazione δ_t può superare un livello di tolleranza accettabile in tempi molto rapidi.

Finora la soluzione dell'equazione del moto è stata assunta nota, cioè abbiamo supposto di conoscere la $x(t)$ *a ogni istante* e *per ogni dato iniziale*. In realtà questo è possibile solo in pochi casi, pertanto, il problema della previsione dell'evoluzione temporale deve essere impostato in modo diverso. Ciò che il più delle volte si verifica è che l'evoluzione temporale di un certo fenomeno è conosciuta sulla base di dati raccolti durante un arco temporale limitato nel passato prossimo. Quindi la questione da studiare è la seguente: sulla base di queste informazioni parziali sull'evoluzione passata è possibile fare delle previsioni su quella futura? Ovviamente la risposta a questa domanda cambia a seconda del tipo di evoluzione.

Riassumendo, le limitazioni sulla capacità di previsione vengono dalla velocità di crescita della funzione $c(t)$, che nel caso particolare della crescita esponenziale rappresenta un ostacolo fondamentale, e dagli errori sulla determinazione dello stato iniziale e, in particolare, dai limiti sull'informazione contenuta nei dati storici.

2.4.1. IL PROBLEMA DELLA PREVISIONE PER I MOTI PERIODICI

La determinazione dell'evoluzione di un moto periodico sembrerebbe una questione poco interessante. Noto il valore *esatto* del periodo, il problema è risolto dopo che il moto è stato osservato per un intero periodo.

In realtà la conoscenza esatta del periodo è una condizione ideale. La misura in giorni dell'anno solare è un esempio indicativo. Lo strumento del calendario, con l'insieme di regole che lo definiscono (il calcolo degli anni bisestili), è necessario per ottenere un'approssimazione della misura del periodo del ciclo delle stagioni. L'approssimazione è tanto migliore quanto più lungo è l'intervallo di tempo durante il quale sono stati raccolti i dati astronomici alla base del calendario. Lo slittamento fra il tempo del calendario e l'anno astronomico cresce *linearmente* con l'*intervallo di previsione*, cioè con la differenza di tempo che ci separa dall'evento futuro che si vuole prevedere. In altri termini, la forma che la (2.7) assume per il calendario, e in generale per qualsiasi evoluzione periodica il cui periodo è determinato in modo approssimato è:

$$\delta_s = s\,\delta_0 \tag{2.8}$$

dove δ_0 è legata alla valutazione approssimata del periodo, s è l'intervallo di previsione e δ_s è l'errore accumulato dopo un intervallo s. Quindi, nel caso di un moto periodico non ci sono essenziali limitazioni alla capacità di previsione: è sempre possibile mettere insieme osservazioni sufficienti per ottenere una determinazione più precisa del periodo e quindi, per la (2.8), una crescita lineare più lenta degli errori di previsione.

2.4.2. IL PROBLEMA DELLA PREVISIONE PER I MOTI MULTI-PERIODICI

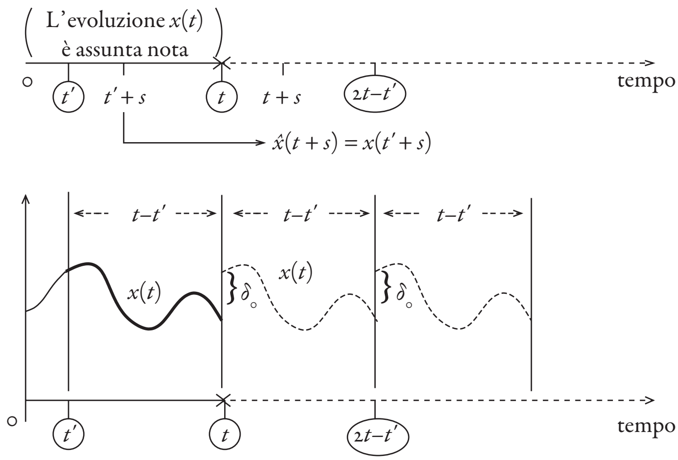
Come nel caso del moto periodico, quando non si conosce la soluzione dell'equazione del moto è necessario usare le informazioni sull'evoluzione nel passato per ottenere una previsione di un'evoluzione quasi-periodica. Qui sotto viene descritto un procedimento, basato sulle proprietà delle equazioni differenziali, che permette di ottenere la stima (2.7) della crescita dell'errore di previsione per un'evoluzione quasi-periodica. Questa analisi segue la trattazione in (Broer, Takens, 2010).

Il principio "la storia si ripete"

Supponiamo di conoscere l'evoluzione dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante attuale t (cfr. FIG. 2.6).

Scegliamo l'istante t' che si trova nella prima metà dell'intervallo fra 0 e t, tale che la distanza δ_0 fra $x(t')$ e lo stato presente $x(t)$ sia la più piccola. Lo stato $x(t')$ è il dato iniziale per l'evoluzione fra gli istanti t' e t. Tenendo conto delle proprietà delle soluzioni delle equazioni differenziali (dipendenza continua dalle condizioni iniziali), il modo ragionevolmente più corretto di usare la conoscenza di un tratto di evoluzione nel passato per prevedere un tratto di evoluzione nel futuro è quello di sostituire allo stato presente $x(t)$ lo stato $x(t')$ in modo da costruire il tratto di evoluzione futura secondo la regola seguente:

FIGURA 2.6
Previsione dell'evoluzione sulla base del principio "la storia si ripete"



$$\hat{x}(t + s) = x(t' + s) \tag{2.9}$$

dove l'intervallo di previsione s va da 0 a $t - t'$. In questo modo la previsione $\hat{x}(t)$ per l'arco di tempo da ora all'istante $2t - t'$ viene costruita assumendola coincidente con l'evoluzione da t' a t. L'equazione (2.9) è l'espressione del *principio "la storia si ripete"*.

Per estendere la previsione oltre l'istante $2t - t'$ si ripete lo stesso procedimento descritto sopra. Si confronta lo stato $\hat{x}(2t{-}t')$ con tutti gli stati precedenti in modo da trovare quello più vicino. Ovviamente quest'ultimo è ancora $x(t')$ perché $\hat{x}\,(2t - t') = x(t)$. Come sopra si aggiunge alla previsione un tratto di evoluzione che coincide con quella fra t' e t (cfr. FIG. 2.6).

In definitiva, applicando il procedimento "la storia si ripete" al segmento conosciuto di evoluzione fra $t = 0$ e t, viene introdotto un modello predittivo che consiste in un'evoluzione periodica con un periodo $t - t'$ e con dei salti δ_0 dovuti all'errore nella sostituzione di $x(t)$ con $x(t')$ (cfr. FIG. 2.6).

Da che cosa è costituito l'errore di previsione quando si applica il principio "la storia si ripete"? In primo luogo da δ_0 il quale dipende sia dal tipo di evoluzione sia dalla lunghezza del tratto di evoluzione nel passato che ci è nota. In generale possiamo dire che più evoluzione nel passato conosciamo migliore potrà essere l'approssimazione dello stato attuale $x(t)$ con uno stato $x(t')$, cioé minore sarà l'errore δ_0. Tuttavia, affermazioni con la stessa generalità non possono essere fatte quando si vanno a considerare evoluzioni di tipo diverso.

Il principio "la storia si ripete" viene applicato per dimostrare la crescita *lineare* dell'errore di previsione. Nei casi in cui la crescita è più veloce, come in particolare quella esponenziale, quando retrospettivamente si incrementa l'intervallo di evoluzione che viene osservata, a un certo aumento dell'intervallo corrisponde un tasso di riduzione dell'errore di approssimazione δ_0 sempre minore. In altri termini, un aumento della conoscenza del passato risulta sempre meno vantaggioso nella determinazione dell'evoluzione futura e perciò anche su scale temporali limitate le previsioni sono destinate ad essere gravate da errori non tollerabili e, quindi, a diventare inutilizzabili. Questo è quello che avviene quando la dinamica è *caotica*. Il metodo "la storia si ripete" si applica solo nei casi in cui osservare un segmento di evoluzione temporale più lungo permette di ottenere un'approssimazione migliore dello stato presente $x(t)$ con $x(t')$, cioè un δ_0 più piccolo. È questo ciò che andiamo a verificare per i moti quasi-periodici.

Applicazione del metodo "la storia si ripete" ai moti quasi-periodici

Si è detto che i moti multi-periodici possono essere periodici o quasi-periodici. Per i primi l'errore cresce linearmente con l'intervallo di previsione. La stessa proprietà vale anche per un moto quasi-periodico e, per mostrarlo, si applica il principio "la storia si ripete".

L'orbita di un moto quasi-periodico può essere pensata sulla superficie di un toro. Essa è una curva non chiusa che ricopre densamente la superficie. Questa proprietà si può esprimere in modo equivalente facendo riferimento a tratti limitati dell'orbita, che sono quelli che possono essere osservati. Infatti, se una curva è densa, esiste un segmento di orbita fra $t = 0$ e un certo istante t_ε tale che la striscia di larghezza ε intorno al segmento ricopre completamente la superficie del toro. Ovviamente, più la larghezza ε è scelta piccola più il segmento di orbita deve essere lungo, ovvero più grande deve essere l'istante t_ε.

Grazie a questa proprietà è possibile applicare il principio "la storia si ripete". Infatti, se un'orbita quasi-periodica è stata osservata da $t = 0$ all'istante attuale t, consideriamo solo la parte $x_{1/2}$ dell'evoluzione fino alla metà di t. Per ogni fissata tolleranza ε, pur di osservare un intervallo di evoluzione nel passato sufficientemente lungo, è sempre possibile verificare che una striscia intorno a $x_{1/2}$ di ampiezza ε ricopre la superficie del toro. In questo modo possiamo affermare che l'errore di approssimazione δ_0 è minore di ε. Quando consideriamo l'evoluzione quasi-periodica (2.6) ogni volta che facciamo evolvere il sistema per un intervallo di tempo t-t' lo spostamento nel moto quasi-periodico (2.6) è A (t-t'), dove la costante A è la stessa per tutti gli intervalli t-t', mentre la previsione costruita secondo il metodo "la storia si ripete" ritorna al suo valore iniziale essendo periodica con il periodo uguale a t-t'.

Tenendo conto della costruzione descritta in precedenza si verifica che $A(t\text{-}t') < \varepsilon$. La previsione di una evoluzione quasi-periodica, sulla base del metodo "la storia si ripete", comporta che l'incremento dell'errore δ_s della previsione (2.9) non possa essere maggiore di ε quando l'intervallo di previsione viene incrementato di un periodo t-t'. In conclusione, per un'evoluzione quasi-periodica, la previsione su un intervallo formato da n_s periodi non può essere gravata da un errore δ_s maggiore di $n_s\ \varepsilon$, ovvero l'errore può crescere al più linearmente rispetto all'intervallo di previsione.

Il problema alla base dell'introduzione di un calendario è la necessità di assumere periodico il moto della terra rispetto al sole. Sappiamo che il sistema, essendo soggetto all'influenza degli altri pianeti, segue un moto multiperiodico. Quindi, nella logica del principio "la storia si ripete", al moto del sistema terra-sole si può associare un periodo approssimato e il raffinamento di questa approssimazione può essere ottenuto tabulando il moto del sistema su un intervallo di tempo sempre più lungo. Questo è ciò che è avvenuto nel passaggio dal calendario giuliano, che si basa su un periodo di quattro anni, al calendario gregoriano, in cui il periodo è di quattrocento anni.

2.5
Evoluzioni caotiche

La capacità di previsione è buona quando l'errore (2.7) non cresce più velocemente di una legge lineare rispetto all'intervallo di previsione. Questo è il caso di tutti i moti quasi-periodici. Come è stato osservato in precedenza, per dimostrare la *linearità* è essenziale verificare che l'errore di approssimazione δ_0 non diminuisca troppo lentamente con la lunghezza dell'evoluzione che è stata osservata.

Per prevedere l'evoluzione $x(t)$ di un fenomeno ricorrendo alle informazioni sul passato è necessario che sia almeno soddisfatta la seguente proprietà.

C.1 *Fissato un* ε *che può essere scelto piccolo a piacere deve esistere un tratto di evoluzione tabulato* O_ε *sufficientemente lungo (informazioni sul passato) tale che per un qualsiasi stato* $x(t)$ *nel futuro si possa sempre trovare uno stato* $x(t')$ *di* O_ε *tale che la distanza fra* $x(t)$ *e* $x(t')$ *sia minore di* ε.

In questo modo volendo applicare il principio "la storia si ripete" si può approssimare lo stato attuale $x(t)$ con $x(t')$ e fare un errore ε che, in linea di principio, potrebbe essere reso piccolo a piacere.

La proprietà C.1 è sempre verificata quando l'orbita è contenuta in un volume finito dello spazio delle fasi[26] (Kelley, 1955) come nell'esempio delle orbite quasi-periodiche che si avvolgono sulla superficie del toro. Tuttavia, essa è una proprietà legata solo alla geometria (topologia) dello spazio delle fasi e non tiene conto della *dinamica* di ogni particolare evoluzione.

Per assicurarsi che l'errore (2.7) non cresca troppo velocemente con l'intervallo di previsione (in altri termini, per avere una buona capacità di previsione), la dinamica deve essere tale che sia soddisfatta la seguente proprietà:

C.2 *Fissato un ε, che può essere scelto piccolo a piacere, lo stato attuale $x(t)$ e lo stato $x(t')$ del segmento osservato di evoluzione che meglio approssima lo stato attuale devono poter essere scelti sufficientemente vicini in modo che le loro evoluzioni $x(t+s)$ e $x(t'+s)$ rimangano all'interno di una striscia di ampiezza ε per ogni s positivo.*

In questa proprietà la dinamica entra in gioco in quanto determina la velocità di variazione (la derivata) rispetto al tempo dello stato. La proprietà C.2 è soddisfatta ogni volta che la velocità di variazione dello stato non cresce più velocemente di una *legge lineare*. Questo è il caso della dinamica di un moto quasi-periodico.

Quando, invece, le soluzioni delle equazioni del moto contengono degli esponenziali allora la proprietà C.2 non è soddisfatta. In questo caso l'errore di previsione (cfr. FIG. 2.7)

$$\delta_s = \delta_0\, e^{\lambda s} \tag{2.10}$$

cresce esponenzialmente con l'intervallo di previsione, all'allungamento del quale la legge (2.10) pone delle essenziali limitazioni. Infatti, se ε rappresenta la tolleranza massima sull'errore di previsione l'orizzonte di previsione[27] è:

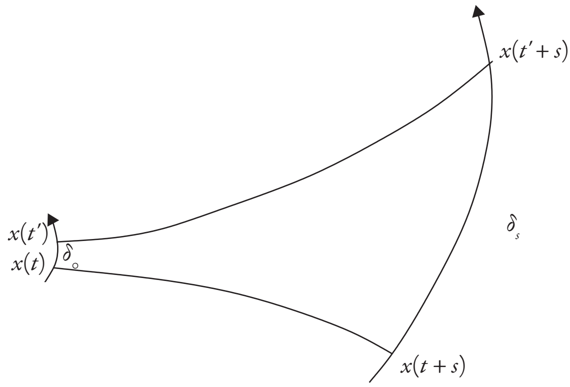
$$s_\varepsilon = \frac{1}{\lambda}\, ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta_0}\right) \tag{2.11}$$

dove *ln* indica il *logaritmo naturale*. La (2.11) permette di apprezzare le limitazioni dovute alla (2.10): per essere s_ε dello stesso ordine di grandezza di

26. Per completezza, occorre aggiungere che lo spazio delle fasi deve avere dimensione finita. Nel nostro caso questo è sempre vero.

27. L'orizzonte di previsione si ottiene risolvendo l'equazione: $\delta_0\, e^{\lambda s} = \varepsilon$.

FIGURA 2.7
Divergenza esponenziale delle orbite vicine



un intervallo $t - t'$ ragionevole, l'errore δ_0 deve essere diminuito di un fattore sufficiente, e questa operazione è di regola dispendiosa se non fisicamente irrealizzabile. Un esempio significativo è lo scostamento δ_0 rispetto alla posizione di equilibrio del pendolo rivoltato; il pendolo spazza un angolo ε di circa 1 radiante in un tempo s_ε di soli 2-3 secondi anche se δ_0 è una frazione di un diametro atomico. Questo fenomeno è quello che è conosciuto come *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*. La capacità di previsione espressa dalla (2.10) è estremamente povera e quasi inutile.

La costante λ è esclusivamente determinata dalla dinamica del sistema. La (2.10) si applica sia nel caso in cui la soluzione dell'equazione del moto può essere calcolata (come nell'esempio del pendolo) sia in caso contrario. Allora δ_0 è, rispettivamente, l'indeterminazione sull'osservazione dello stato iniziale e l'errore di approssimazione quando si applica il principio "la storia si ripete".

Per concludere, vogliamo introdurre un criterio per stabilire in quale misura la proprietà c.2 non è soddisfatta, così da caratterizzare i moti per i quali si verifica la crescita esponenziale dell'errore di previsione. Sia ε la tolleranza introdotta nella proprietà c.2 e consideriamo due stati distinti $x(t)$ e $x(t')$ separati da una distanza δ_ε che non sia maggiore di ε. Consideriamo le evoluzioni $x(t+s)$ e $x(t'+s)$ di questi stati per un tempo s e $\delta_\varepsilon(s)$ è la distanza fra gli stati evoluti. Il rapporto $\delta_\varepsilon(s)/\delta_\varepsilon$ rappresenta il fattore di variazione della distanza fra le orbite quando il tempo viene incrementato di s unità. Questo fattore può essere maggiore o minore di 1 a seconda che le orbite tendano ad allontanarsi o ad avvicinarsi. Esso dipende dalla coppia di tempi t e t' fissati all'inizio; per ε ed s fissati fra tutte le coppie di tempi t e t' scegliamo quella che produce il valore più grande del fattore di variazione e indichiamo questo valore con $\mathcal{E}(\varepsilon, s)$. La quantità $\mathcal{E}(\varepsilon, s)$ è una funzione che dipende sia da ε che da s.

Se l'orbita è contenuta in un volume finito dello spazio delle fasi, vale la proprietà che per ogni fissato valore di s la funzione $\mathcal{E}(\varepsilon, s)$ tende ad aumentare quando il valore di ε viene diminuito. Quando consideriamo ε prossimo a 0 la funzione $\mathcal{E}(\varepsilon, s)$ assume il suo valore più grande per il particolare s fissato. Questo valore più grande è ancora una funzione di s e per valori grandi di s esso ha la forma seguente:

$$\mathcal{E}(s) = e^{\lambda s} \tag{2.12}$$

Il coefficiente λ è dovuto alle proprietà della dinamica ed esprime quanto rapidamente si separano e si "disperdono" con il passare del tempo le evoluzioni nello spazio delle fasi che iniziano vicine.

Esso è chiamato *coefficiente di dispersione*[28].

Il coefficiente λ assume un valore finito per ogni evoluzione deterministica e, in particolare, è:

– $\lambda \leq 0$ per ogni moto multi-periodico (periodico e quasi-periodico); la proprietà c.2 è ben soddisfatta, la capacità di previsione è buona e la velocità di crescita dell'errore di previsione è al più lineare;

– $\lambda > 0$ vale per quei moti che presentano le caratteristiche discusse con la (2.10) in cui il fattore all'esponente è proprio il coefficiente di dispersione.

Ogni moto, la cui orbita è contenuta in un volume finito dello spazio delle fasi, è detto *caotico* quando il suo coefficiente di dispersione è positivo.

2.6
Dalle singole orbite alle famiglie di sistemi

2.6.1. PERSISTENZA DI UNA PROPRIETÀ RISPETTO ALLA VARIAZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI

Fino a questo punto l'attenzione è stata rivolta ad alcune proprietà geometriche delle singole orbite. Questo punto di vista non è ancora sufficiente per guardare alle proprietà che sono rilevanti nell'approccio qualitativo alla dinamica, come in particolare la nozione di "vicinanza" e i concetti di "equi-

28. Il coefficiente di dispersione è strettamente legato *all'esponente di Lyapunov massimo* (Guckenheimer, Holmes, 1983).

valenza" e di *stabilità*, il cui senso verrà definito più avanti. Infatti, queste proprietà riguardano *insiemi di orbite*, cioè di dati iniziali. Di regola, i dati iniziali di un gruppo di orbite formano un insieme *aperto*[29] che può essere limitato o meno. In realtà abbiamo già considerato la distanza fra coppie di orbite quando è stata introdotta la nozione di evoluzione caotica; a partire da dati iniziali vicini le traiettorie di fase si allontanano con velocità esponenziale.

Seguendo questo approccio, le proprietà interessanti sono quelle che sono condivise da un certo insieme di orbite. Più precisamente, si considera una particolare evoluzione $x(t)$ del sistema con dato iniziale $x(0)$. Allora una certa proprietà P posseduta da $x(t)$ è detta *persistente* quando esiste una sferetta di centro $x(0)$ e raggio piccolo quanto si vuole e i punti della sferetta sono i dati iniziali di orbite che hanno tutte la proprietà P. In altri termini, nelle immediate vicinanze di $x(t)$ non ci sono orbite che non hanno la proprietà P.

Ritornando all'esempio del pendolo libero, tutte le orbite che corrispondono a oscillazioni intorno al punto di equilibrio inferiore hanno come proprietà persistente quella di essere periodiche.

Lo stesso si può dire per tutte le orbite che corrispondono a rotazioni. Al contrario, la proprietà che definisce un punto fisso non è persistente; vicino a un punto di equilibrio ci sono solo orbite periodiche. La proprietà di un'orbita eteroclina (cioè quell'orbita lungo la quale è necessario un tempo infinito sia verso il futuro che verso il passato per raggiungere il punto di equilibrio superiore) non è condivisa dalle orbite vicine che sono tutte periodiche.

Questa nozione di "condivisione" delle proprietà con le orbite vicine è sicuramente naturale, ma rischia di essere troppo restrittiva non potendosi applicare, in particolare, ai sistemi *conservativi* (*hamiltoniani*) *integrabili*[30] perturbati (Arnold, 1988b), ovvero quelli a cui si applica il teorema KAM. Infatti, i moti di un sistema hamiltoniano integrabile sono tutti multi-periodici[31] e ogni volta che al sistema è applicata una perturbazione "alcuni" dei moti quasi-periodici vengono trasformati in moti di altra natura, in corrispondenza di zone di instabilità che si formano nello spazio delle fasi. Il teorema KAM suggerisce che la condivisione delle proprietà dovrebbe essere intesa non nel senso delle sferette di dati iniziali, ma dei "volumi"[32] dello spazio delle fasi. Più precisamente, per la teoria KAM all'interno di

29. Un insieme è detto aperto quando ogni suo punto è il centro di almeno una sferetta tutta contenuta nell'insieme.

30. Un sistema è integrabile quando le costanti del moto note sono in numero sufficiente per risolvere le equazioni del moto del sistema.

31. Questa proprietà è una delle tesi del teorema di Liouville per i sistemi integrabili (Arnold, 1988b).

32. La nozione tecnica corretta è quella di misura (Halmos, 1950).

una qualsiasi sferetta intorno al dato iniziale di un moto quasi-periodico di un sistema perturbato si troverà almeno un dato iniziale di un'orbita di una zona di instabilità. Quindi, in base alla definizione precedente, la quasi-periodicità non sarebbe una proprietà persistente in un sistema perturbato. Tuttavia, per il teorema KAM il volume delle zone di instabilità è piccolo in quanto varia con l'intensità della perturbazione e, quindi, l'insieme dei dati iniziali delle orbite quasi-periodiche occupa quasi tutto lo spazio delle fasi. In questo senso risulta naturale considerare la quasi-periodicità come una proprietà persistente delle orbite di un sistema integrabile perturbato. Ovviamente le due nozioni di persistenza non coincidono.

I moti dei pianeti e il pendolo (2.5) debolmente forzato (cioè con ε diversa da 0 e piccola rispetto a 1) sono esempi di sistemi hamiltoniani perturbati, e per loro vale l'analisi secondo la teoria KAM.

2.6.2. PERSISTENZA DI UNA PROPRIETÀ RISPETTO ALLA VARIAZIONE DI PARAMETRI

Supponiamo che la dinamica del sistema dipenda da fattori a esso esterni. Ciò si riflette nel fatto che l'espressione del campo vettoriale dell'equazione del moto contiene uno o più *parametri*, cioè numeri che quantificano l'effetto esterno. Un esempio, forse poco interessante, comunque utile a capire, è il moto di un grave, ovvero il modello della palla descritto in precedenza. Nell'equazione (2.1) compare la costante di gravità g, il cui valore cambia da pianeta a pianeta; sulla Terra g è circa 10[33], sulla Luna è un sesto di quella sulla Terra, mentre su Giove l'accelerazione è circa 25. Rispetto al sistema "palla" il pianeta su cui essa sta rimbalzando rappresenta l'ambiente esterno e g è il parametro che quantifica la forza che il pianeta esercita sulla palla.

Un esempio più significativo di sistema che dipende da un parametro è un modello di dinamica delle popolazioni (May, 1976), rappresentato dalla legge seguente:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \qquad n = 0, 1, 2, 3,... \tag{2.13}$$

e chiamato *mappa logistica*. Lo stato x_n è un numero compreso fra 0 e 1 (lo spazio delle fasi è il segmento $[0, 1]$) e rappresenta il rapporto fra la popolazione della generazione n-esima di una certa specie animale e una soglia massima di popolazione che, se superata, porterebbe all'estinzione della

33. I valori dell'accelerazione di gravità sono dati nell'unità di $\frac{m}{s^2}$ ("metro su secondo al quadrato").

specie. L'equazione del moto (2.13) permette di calcolare la popolazione di una generazione a partire dalla popolazione della generazione precedente. In (2.13) il tempo è una variabile *discreta*, cioè assume i suoi valori n nell'insieme dei numeri naturali, e con essa le generazioni sono numerate nel loro ordine di successione. La mappa logistica è stata presa in considerazione in questo contesto per la presenza del parametro μ; questo è il *fattore di riproduzione*, cioè il numero medio di figli per ogni individuo. Il parametro μ dipende dalle condizioni esterne (clima, disponibilità di risorse, presenza di nemici naturali), poiché il modello prevede che un valore di μ maggiore di 4 porterebbe in ogni caso all'estinzione della specie.

Una perturbazione esterna, in generale, lascia tracce sul ritratto di fase di un sistema, e occorre capire se esse rappresentano delle modifiche sostanziali. Come per la persistenza di una proprietà rispetto a piccoli cambiamenti del dato iniziale, sorge la questione di individuare quelle proprietà di un modello che non sono "sensibili" rispetto ai piccoli cambiamenti del modello, dovuti a variazioni dei parametri che lo definiscono o a piccole perturbazioni. Per fissare le idee su un problema relativamente semplice, consideriamo in particolare le proprietà di *stabilità* dei punti fissi, cioè dei punti dello spazio delle fasi in cui si annulla il campo vettoriale. A questo punto è necessario capire come si studia la stabilità di un punto fisso.

2.6.3. IL PROBLEMA DELLA STABILITÀ

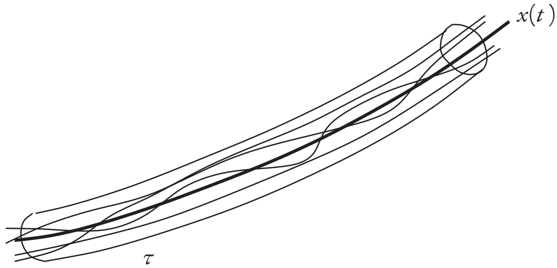
Lyapunov ha introdotto una nozione di stabilità di una soluzione $x(t)$ di un'equazione del moto (Lyapunov, 1966): *l'orbita $x(t)$ è stabile se intorno a essa può essere scelto un "tubo" τ di spazio delle fasi, con un raggio piccolo quanto serve, avente la proprietà che ogni orbita che a un certo istante transita nel tubo è obbligata a rimanervi per sempre* (cfr. FIG. 2.8).

In base a questa definizione, sono stabili il punto di equilibrio inferiore e tutte le orbite di oscillazione di un pendolo (2.3) e non è stabile l'orbita eteroclina. Esiste, evidentemente, una relazione fra la stabilità secondo Lyapunov e la persistenza delle proprietà rispetto ai dati iniziali.

Supponiamo di muoverci lungo $x(t)$. Da questo punto di osservazione l'orbita $x(t)$ risulta essere un "punto fisso". In questo modo, per studiare la stabilità dell'orbita è sufficiente risolvere lo stesso problema per un punto fisso.

Lo studio della stabilità di un punto fisso è un problema di cui si conosce la soluzione per tutti i punti fissi di un'equazione lineare, cioè quando il campo vettoriale $f(x)$ è una funzione lineare di x. Per questo problema particolare, tutti i casi che si possono presentare in uno spazio delle fasi a

FIGURA 2.8
Stabilità nel senso di Lyapunov per l'orbita $x(t)$; il "tubo" τ contiene a ogni tempo le orbite "vicine" a $x(t)$



due dimensioni sono quelli della figura 2.2 (Arnold, 1979). Più specificamente, si ha:

a) *stabilità asintotica*, quando tutte le orbite nell'intorno di un punto di equilibrio sono attratte da esso (cfr. FIGG. 2.2*a*, *b*);

b) *stabilità*, quando il punto di equilibrio è circondato da orbite periodiche (cfr. FIG. 2.2*c*);

c) *instabilità*, quando almeno una delle orbite si allontana dal punto di equilibrio (cfr. FIGG. 2.2*d*, *e*, *f*)

Come si affronta lo studio della stabilità di un punto fisso x_0 di un campo vettoriale $f(x)$ *non-lineare*? I risultati della teoria lineare sono di qualche aiuto? La prima idea che si sarebbe tentati di applicare è quella di sostituire il problema iniziale con uno lineare, approssimato, dato dalla *linearizzazione* di $f(x)$ rispetto a x_0[34]. Per il *teorema di Hartman-Grobman* (Arnold, 1988a), le soluzioni del sistema non-lineare vicino a un suo punto fisso e le soluzioni del corrispondente problema linearizzato hanno lo stesso comportamento qualitativo, ad eccezione del caso *b*). Da questo segue che nei casi *a*) e *c*) piccole variazioni del modello generano solo deformazioni non significative nelle strutture dello spazio delle fasi intorno al punto fisso. Per il caso *b*) la situazione è completamente diversa: una piccola perturbazione, in generale, non conserva le orbite chiuse che, a seconda della perturbazione, possono aprirsi spiraleggiando o verso il punto fisso o verso l'esterno, cioè il punto fisso stabile può diventare asintoticamente stabile (caso *a*) o instabile (caso *b*).

34. La linearizzazione rispetto a x_0 consiste nel sostituire $f(x)$ con la funzione lineare $f'(x_0)x$, dove $f'(x_0)$ è la derivata di $f(x)$ calcolata in x_0.

2.6.4. STABILITÀ STRUTTURALE E BIFORCAZIONI

Consideriamo un pendolo che viene frenato da un *attrito*. Per tener conto dell'attrito, nell'equazione del moto viene aggiunto un termine $-c\dot{x}$, dipendente da un parametro $c > 0$ che misura l'intensità dell'attrito. Questo sistema, chiamato *pendolo smorzato*, ha l'equazione del moto:

$$\dot{x} = v \qquad (2.14)$$
$$\dot{v} = f(x) - c\dot{x}$$

Il sistema (2.14) ha lo stesso punto fisso del pendolo libero, ma i due punti fissi hanno proprietà di stabilità diverse. Mentre la stabilità del pendolo libero corrisponde al caso *b*) (cfr. FIG. 2.2*c*) dove a essere persistenti sono le orbite periodiche, la stabilità del punto fisso del pendolo smorzato è data dal caso *a*) (cfr. FIG. 2.2.*b*).

Se il pendolo libero è visto come caso particolare del sistema (2.14) con $c = 0$, allora la persistenza dell'evoluzione periodica viene sostituita da una persistenza diversa, quella delle orbite che vengono "attratte" dal punto fisso, non appena c diventa diverso da 0. L'instabilità del pendolo libero corrisponde al caso che non è coperto dal teorema di Hartman-Grobman. Al contrario, variando leggermente il parametro c di un pendolo smorzato, la struttura del ritratto di fase intorno al punto fisso viene conservata, a parte piccole deformazioni.

Perché sia garantita la forma di stabilità che caratterizza il pendolo smorzato, occorre che qualsiasi "piccola" modifica nel campo vettoriale (ovvero qualsiasi piccola variazione del parametro) sia accompagnata da una conservazione qualitativa delle strutture nello spazio delle fasi, senza che vi sia creazione o distruzione di punti fissi, di orbite periodiche, sia mantenuta la conservazione delle proprietà persistenti ecc. Quando si verifica questo, si dice che il sistema è *strutturalmente stabile* (Guckenheimer, Holmes, 1983; Hirsch, Smale, 1974).

Quando il campo vettoriale viene debolmente perturbato, i punti fissi e le curve di fase chiuse (i moti periodici) di un sistema che possiede stabilità strutturale[35] non spariscono e si spostano leggermente[36].

35. Un punto fisso di un sistema strutturalmente stabile è *non-degenere*, cioè la matrice jacobiana del campo vettoriale, calcolata nel punto fisso, non deve avere un autovalore zero. In particolare, nel caso di uno spazio delle fasi mono-dimensionale, non deve essere nulla la derivata del campo vettoriale calcolata nel punto fisso; questo è detto uno *zero trasverso*.

36. Il piccolo spostamento si ottiene applicando il teorema delle *funzioni implicite* al campo vettoriale vicino a uno zero trasverso.

Stabilire quanto diffusa sia la proprietà di stabilità strutturale, nell'insieme di tutti i possibili campi vettoriali definiti su un dato spazio delle fasi, è una questione interessante che non ha una soluzione facile. In alcuni casi, come per i campi vettoriali su una circonferenza o su una superficie sferica, si dimostra che la "quasi-totalità" dei sistemi è strutturalmente stabile[37] (Arnold, 1988a). In questi casi, si dice che la stabilità strutturale è una proprietà *generica*. In generale ciò è vero per i sistemi che hanno dimensione 1 o 2. Per le classi di sistemi che hanno una dimensione maggiore si può verificare che una qualsiasi perturbazione di un sistema strutturalmente instabile conduce, in ogni caso, a un altro sistema instabile. Un esempio in questo senso è dato dal *sistema di Lorentz*, che è un'approssimazione dell'equazione di Navier-Stokes, con la quale si descrive la convezione di un flusso fluido (Broer, Takens, 2010); in questo sistema è presente un particolare insieme, chiamato *attrattore di Lorentz*, che ha la proprietà di avere una struttura che viene modificata quando variano i parametri del sistema.

Un esempio di sistema non strutturalmente stabile è quello per il quale la transizione a sistemi strutturalmente stabili avviene attraverso piccole perturbazioni che sono accompagnate a sparizione, sdoppiamento, cambiamento di proprietà di stabilità di punti fissi o curve chiuse. Questi sono esempi particolari di processi che, in corrispondenza di particolari valori dei parametri, determinano delle metamorfosi qualitative della dinamica che sono chiamate *biforcazioni*.

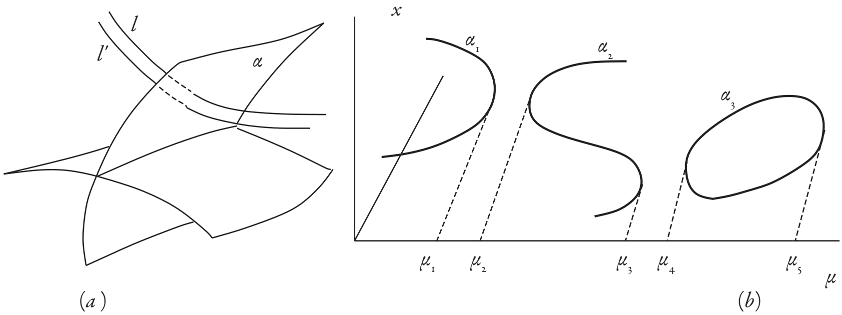
Una *famiglia* generica di campi vettoriali che dipendono da certi parametri è l'insieme dei campi vettoriali per tutti i valori dei parametri. Un punto di interesse è stabilire la condizione per la quale le biforcazioni nella famiglia sono robuste rispetto a piccole perturbazioni. Per rispondere a questa domanda ci aiutiamo con la figura 2.9*a* e con un ragionamento euristico dovuto a Poincaré, che è ricordato nei testi di Arnold (1988a; 1990). Nella figura è rappresentato l'insieme di tutti i sistemi (cioè di campi vettoriali) su un dato spazio delle fasi; esso è suddiviso in domini, in ognuno dei quali il sistema ha proprietà generiche, cioè robuste rispetto alle perturbazioni, come i nodi, le selle e i fuochi di un campo vettoriale nel piano. Questi domini sono divisi da superfici di sistemi *degeneri* (come per esempio α), cioè con proprietà non generiche, come per esempio un centro. Una famiglia di sistemi dipendenti da un parametro è rappresentata in questo spazio da una linea (la linea l), dove un punto è il sistema per un certo valore del

37. Con "quasi-totalità" si intende che l'insieme dei campi vettoriali strutturalmente stabili è un insieme aperto e denso ovunque nell'insieme di tutti i campi vettoriali.

parametro. Insiemi di sistemi che dipendono da più parametri formano superfici, volumi, e così via. Quando la linea l interseca una superficie α, esiste un valore del parametro a cui corrisponde un sistema della famiglia che ha proprietà non generiche, ovvero si ha una biforcazione. Una piccola perturbazione modifica i sistemi della linea l e il luogo dei sistemi perturbati è una linea l' vicina a l. Affinché la perturbazione non elimini la biforcazione è necessario che anche l' intersechi α. Ciò è garantito quando l interseca α "con un angolo diverso da zero" e, inoltre, la dimensione di α deve essere uguale alla differenza fra la dimensione di tutto lo spazio e il numero dei parametri della famiglia (in questo caso un parametro). La differenza fra la dimensione dello spazio dei sistemi e la dimensione di α è chiamata la *codimensione* di α. Se α avesse una codimensione maggiore di 1 (se α fosse, per esempio, una linea), sarebbe sempre possibile trovare una perturbazione che rimuove l'intersezione fra l e α. Quindi le uniche biforcazioni da considerare per una certa famiglia di stati, ovvero quelle robuste rispetto alle perturbazioni, devono appartenere a superfici α aventi una codimensione non più grande del numero di parametri della famiglia.

Per inquadrare il fenomeno della biforcazione, consideriamo il caso semplice di un punto fisso degli stati della famiglia della linea l, che dipendono da un parametro μ. A parte il sistema dell'intersezione fra l e α, tutti gli altri punti della linea devono corrispondere a sistemi strutturalmente stabili, e quindi un loro punto fisso non può essere un centro (cfr. FIG. 2.2*c*). Variando il parametro cambia anche il punto fisso $x(\mu)$ del sistema che corrisponde al valore μ del parametro. Si stabilisce una corrispondenza fra μ e $x(\mu)$ che è rappresentata da una curva *regolare* in un sistema cartesiano sui cui assi sono riportati μ e x (cfr. FIG. 2.9*b*) (Arnold, 1988a). Una curva della figura è chiamata *diagramma di biforcazione* (le curve α_i nella figura 2.9*b*). Il parametro μ incontra un valore di biforcazione, che corrisponde a una intersezione di l con α, quando μ raggiunge un *minimo* o un *massimo* percorrendo il diagramma di biforcazione. Nella figura 2.9*b* si hanno delle biforcazioni quando il parametro assume i valori μ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. In queste biforcazioni coppie di punti fissi, *di cui uno è stabile e l'altro instabile* (casi *a*) e *c*) della classificazione sulla stabilità dei punti fissi), si creano o si annichilano (Arnold, 1990). Quale dei due fenomeni si verifica è determinato dai termini di secondo grado in x dei campi vettoriali dei sistemi, quando il valore del parametro è vicino al valore di biforcazione (Arnold, 1988a). Per una famiglia a un parametro, la creazione e distruzione di coppie esauriscono le possibili biforcazioni dei punti fissi che sono robuste rispetto alle piccole perturbazioni. Infatti, ogni altra biforcazione,

FIGURA 2.9
(*a*) Spazio dei sistemi: α è una superficie di sistemi strutturalmente instabili che separa domini di sistemi con proprietà generiche; l è una famiglia di sistemi a un parametro e l' è una perturbata della famiglia l. (*b*) Diagrammi di biforcazione di punti fissi (α_i, $i = 1, 2, 3$) e valori del parametro in corrispondenza delle biforcazioni (μ_i, $i = 1, \dots, 5$)



se opportunamente perturbata, può essere scomposta in più biforcazioni del tipo considerato.

Una biforcazione che può verificarsi in una famiglia generica a un parametro fa parte di un esteso spettro di fenomeni e vario è il tipo di oggetto che la può definire:

a) un'orbita periodica, come nella *biforcazione di Hopf* (Guckenheimer, Holmes, 1983);

b) i tori, nelle perturbazioni quasi-periodiche (Hanßmann, 2007), in cui la teoria delle biforcazioni si sposa con la teoria KAM;

c) gli *attrattori strani* nello scenario di innesco della turbolenza basato su un'idea di Ruelle e Takens (Ruelle, Takens, 1971) che ha modificato la teoria di Landau (Landau, Lifshitz, 2013);

d) le orbite caotiche le quali, oltre che negli attrattori strani, si osservano in coda a sequenze infinite di biforcazioni come nella transizione al caos della mappa logistica (2.13) (Devaney, 1989).

Di un certo interesse sono le biforcazioni di tipo *a*) in uno spazio delle fasi a due o più dimensioni, quando un punto fisso perde la sua stabilità e, nello stesso tempo, un'orbita periodica evolve secondo una delle seguenti possibilità (Andronov *et al.*, 1973):

1. l'orbita periodica è generata stabile dal punto fisso;
2. l'orbita periodica è instabile e collassa sul punto fisso.

Da questi processi hanno origine diverse sequenze di trasformazioni che hanno svariate applicazioni nella *teoria delle oscillazioni*, qualcuna delle quali è caratterizzata da evoluzioni caotiche.

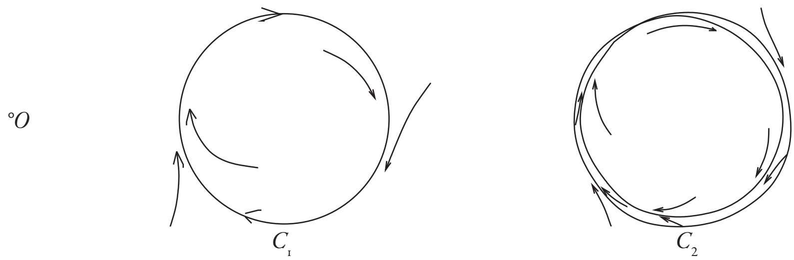
2.7
Il problema della previsione e la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

Prima della teoria delle biforcazioni, ogni sperimentatore che avesse trovato oscillazioni aperiodiche complicate, per esempio in una reazione chimica, avrebbe imputato la causa a qualche fenomeno spurio o a possibili influenze esterne. È ora chiaro, invece, che queste oscillazioni complesse sono correlate con la vera essenza del processo e determinate dalle equazioni fondamentali del problema e non da effetti esterni casuali.

La teoria qualitativa dei processi evolutivi, fornendo una spiegazione a comportamenti complessi della dinamica di un sistema, ha il merito di aver fatto comprendere come l'irregolarità faccia parte della natura intrinseca di una dinamica, nella quale in passato si pensava avessero diritto di cittadinanza solo i modi di comportamento stazionari o periodici.

Sappiamo che la previsione dell'evoluzione è problematica nei sistemi differenziali deterministici in cui si verifica che una perturbazione delle condizioni iniziali piccola quanto si voglia produce, in ogni caso, una traiettoria il cui scarto da quella originaria ha una divergenza esponenziale. Questo fenomeno, chiamato "sensibilità alle condizioni iniziali" si osserva quando sono presenti orbite caotiche. Il punto critico consiste nel fatto che la conoscenza delle condizioni iniziali di un sistema qualsiasi è inivitabilmente approssimata; l'evoluzione asintotica della soluzione che corrisponde allo stato presente, determinato in modo approssimato, può differire dalla situazione reale così da rendere inaffidabile una previsione anche su scale temporali relativamente piccole. Nell'esempio del pendolo libero abbiamo visto che una piccola deviazione (posizione o velocità) dall'equilibrio verticale produce un mutamento ulteriore che cresce esponenzialmente con il tempo. Tuttavia, quest'osservazione non porta a concludere che il pendolo libero sia un sistema caotico poiché l'equilibrio verticale è una condizione eccezionale. Affinché la dinamica sia caotica è necessario che la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali sia verificata "abitualmente", cioè per un insieme di condizioni iniziali che sia un "volume" non nullo dello spazio delle fasi.

FIGURA 2.10
Sono mostrati i primi moti (moto stazionario, moto periodico, moto con raddoppio del periodo) del processo (cascata di Feigenbaum) che termina con la creazione di un attrattore strano su cui avvengono i moti caotici che corrispondono al pieno sviluppo della turbolenza secondo la teoria di Ruelle-Takens.



In quali sistemi si trovano evoluzioni temporali caotiche? In primo luogo, si può avere una dinamica caotica solo in un sistema con uno spazio delle fasi di dimensione maggiore di due. Un criterio generale, cui ci si richiama nello studio e nella definizione stessa dei sistemi caotici, è quello che passa attraverso il calcolo di un esponente di dispersione positivo. Ci sono determinati fenomeni che si verificano in particolari classi di dinamiche e che sono connessi all'esistenza di evoluzioni caotiche in quelle dinamiche. Consideriamo tre esempi importanti.

Abbiamo visto che quando la dinamica presenta un certo numero di orbite periodiche "indipendenti" allora i moti sono multi-periodici e giacciono sui tori. Questa dinamica non presenta dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Se, invece, i moti periodici vengono in qualche modo "accoppiati" con una interazione sufficientemente intensa allora nella nuova dinamica, che cessa di essere quasi-periodica, compare il caos.

Il secondo meccanismo è quello che descrive la turbolenza idrodinamica e la comparsa di un attrattore strano nella dinamica di un sistema dissipativo (Ruelle, Takens, 1971). Quando si alimenta il sistema con una quantità sempre maggiore di potenza per accendere la turbolenza, si genera una successione di moti diversi, che si conclude con un moto caotico su un attrattore; il punto fisso iniziale (moto laminare) si trasforma in un moto periodico con un certo periodo che, a sua volta, è sostituito da un'altra orbita periodica vicina alla prima e con un periodo circa doppio (cfr. FIG. 2.10). Quest'ultimo passaggio si ripete un numero infinito di volte, creando orbite periodiche di periodo sempre più

FIGURA 2.11
Nella figura (*a*) è mostrato lo spazio delle fasi del "finto pendolo forzato" (equazione 2.5 con $\varepsilon = 0$) l'orbita eteroclina è la curva γ che giace sulla superficie α. Nella figura (*b*) è rappresentato lo spazio delle fasi del pendolo forzato con ε diverso da zero. La superficie α si separa in due superfici che hanno come "lembi" le curve $\mathcal{W}_s$ e $\mathcal{W}_u$, che sono chiamate, rispettivamente, la varietà stabile e la varietà instabile del punto di equilibrio del pendolo rivoltato ($x = \pi$, $x = -\pi$). Il punto p_0 è l'intersezione eteroclina trasversa delle curve $\mathcal{W}_s$ e $\mathcal{W}_u$. Se esiste una intersezione eteroclina allora ne esistono infinite; nella figura sono mostrate p_1 e p_{-1} che sono le intersezioni più vicine a p_0

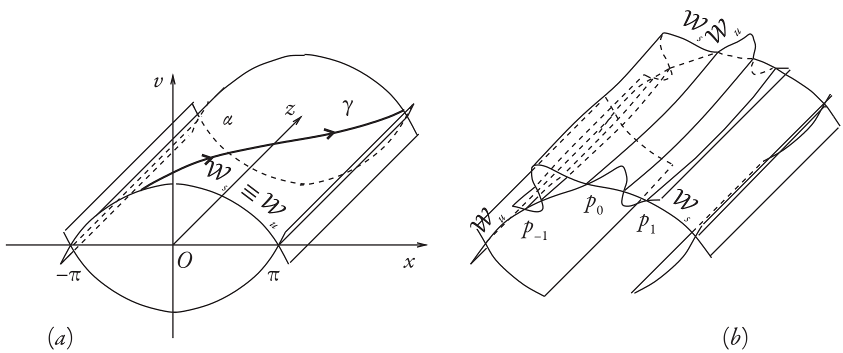
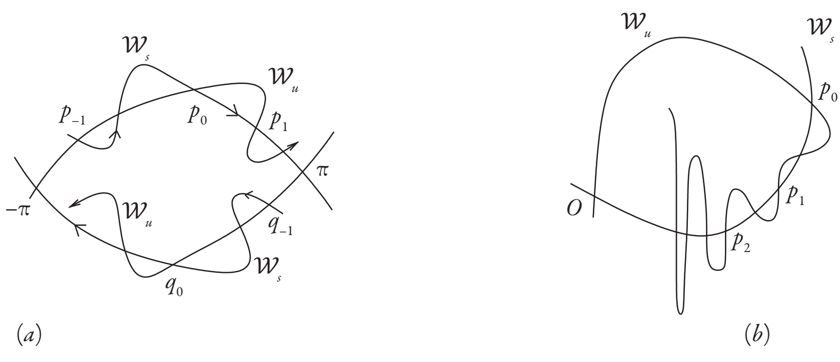


FIGURA 2.12
Nella figura (*a*) è mostrata una sezione piana per una certa fissata z della figura 2.11*b*. I punti p_0, p_1, p_{-1} e q_0, q_1, q_{-1} sono intersezioni eterocline trasverse. Nella figura (*b*) è mostrato il caso analogo con un unico punto fisso O da cui si diramano le varietà $\mathcal{W}_s$ e $\mathcal{W}_u$. Queste varietà hanno origine dallo sdoppiamento di una curva chiamata orbita omoclina che inizia da O e finisce nello stesso punto. Le curve $\mathcal{W}_s$ e $\mathcal{W}_u$ si intersecano nei punti p_0, p_1, p_2 ecc. che sono chiamati intersezioni omocline trasverse di $\mathcal{W}_s$ e $\mathcal{W}_u$



grande; questo fenomeno è chiamato *cascata con raddoppio di periodo* (Feigenbaum, 1979).

L'ultimo fenomeno si osserva quando in una dinamica conservativa una perturbazione modifica l'orbita eteroclina e si crea un'*intersezione eteroclina trasversa* (Guckenheimer, Holmes, 1983) (cfr. FIGG. 2.11, 2.12). Poiché si dimostra che la dinamica intorno al punto di intersezione e quella della mappa del ferro di cavallo (Broer, Takens, 2010) sono una lo specchio dell'altra, e poiché il ferro di cavallo è un sistema caotico, allora nelle vicinanze dell'intersezione eteroclina le orbite del sistema perturbato sono caotiche. Questo è quello che si osserva nel pendolo libero al quale è applicata una forza debole (cfr. FIGG. 2.11*a*, *b*). L'intersezione trasversa eteroclina è un meccanismo che era già chiaro a Poincaré, il quale lo applicò per mostrare che nel problema a tre corpi ristretto ci possono essere delle evoluzioni caotiche.

3

Ordine e caos nella scienza moderna

di *Leone Fronzoni*

3.1
Introduzione

Ordine e disordine sono due aspetti complementari della natura che normalmente vengono considerati in competizione. La vita nell'Universo si contrappone alla morte termica, destino finale espresso dall'inesorabile crescita dell'entropia. L'ordine è caratterizzato dalla possibilità di poter fare previsioni grazie alla presenza di periodicità o coerenze sia nello spazio che nel tempo. Ordine è un concetto ben definito e noto fin dall'antichità. Lo stesso non si può dire per il disordine, dato che esistono due tipi di disordine: uno associato a una dinamica *deterministica* e l'altro legato ai processi *aleatori*, come il lancio della moneta. Soltanto recentemente è stata compresa la differenza fra queste due tipologie.

Determinismo significa che una volta date le condizioni iniziali l'evoluzione è univocamente definita, ma in certi casi una piccola variazione nelle condizioni iniziali genera evoluzioni tanto diverse da rendere il processo impredicibile. Un processo aleatorio è caratterizzato da un'infinità di condizioni iniziali che lo rendono in pratica imprevedibile. Come esempio si consideri il lancio della moneta: il risultato, testa o croce, dipenderà dalle infinite combinazioni nel modo di lanciare la moneta. Disordine è sinonimo di aperiodicità e irreversibilità. Il disordine deterministico prende il nome di "caos" e l'aspetto rilevante è che può essere presente anche in sistemi caratterizzati da pochi gradi di libertà. Un punto materiale vincolato a muoversi lungo una guida ha un grado di libertà; diversamente, se questo è libero di muoversi nel piano, i gradi di libertà saranno due. Il disordine generato da aleatorietà ha infiniti gradi di libertà. Attraverso semplici modelli matematici è possibile descrivere e comprendere i meccanismi di base che generano processi ordinati e disordinati in una visione unitaria, dove il concetto di *non-linearità* gioca un ruolo essenziale.

Nei paragrafi che seguono sono riportati gli elementi fondamentali che coinvolgono profondamente il rapporto fra l'ordine e il disordine. I processi aleatori, il caos deterministico, le biforcazioni, la sincronizzazione e l'entropia verranno discussi considerando dei sistemi dinamici come un semplice pendolo forzato, i solitoni, i network e il fenomeno della turbolenza. L'aspetto rilevante di questa discussione è la novità concettuale che prende il nome di "emergenza", caratterizzata dalla nascita spontanea dell'ordine in sistemi lontani dall'equilibrio termodinamico.

3.2
La riscoperta del caos

Nel 1963 un meteorologo americano, Eduard Lorenz, si propose di simulare al computer la dinamica dell'atmosfera attraverso un modello semplificato dell'*equazione di Navier-Stokes*, che consiste essenzialmente nell'equazione della seconda legge di Newton espressa in una forma adatta a descrivere il moto di un fluido. Tale modello è basato su un sistema di tre semplici equazioni differenziali non-lineari. Lorenz si rese conto che l'evoluzione di questo sistema presentava un'estrema sensibilità alle condizioni iniziali, evidenziando una grande complessità nell'evoluzione, tanto da renderne impossibile una previsione a medio termine. Questo comportamento prende il nome di "caos" e rende ragione della ricchezza di comportamenti in molti sistemi, non solo fluidodinamici.

Occorre sottolineare che Lorenz aveva riscoperto ciò che Poincaré più di sessant'anni prima aveva ottenuto attraverso i suoi calcoli, nell'intento di trovare una soluzione analitica generale al problema dei tre corpi, ovvero di determinare se il nostro Sistema solare è stabile o meno. Poincaré dimostrò che la risposta è negativa, ma – cosa sorprendente – la dinamica risultava estremamente complessa e imprevedibile. Alla base di questo comportamento gioca in modo determinante la non-linearità nelle equazioni che descrivono la sua evoluzione complessiva.

Non-linearità significa in sostanza che non vale il *principio di sovrapposizione*, o semplicemente che alla somma delle cause non consegue la somma degli effetti. Una definizione del caos sufficientemente rigorosa consiste nel considerare due valori iniziali (molto vicini) delle variabili dinamiche e osservare le traiettorie corrispondenti. Se le traiettorie divergono in maniera esponenziale allora la dinamica è caotica. Questo esprime il concetto di estrema *sensibilità alle condizioni iniziali*, perché gli andamenti esponenziali sono tali che un piccolo errore porta velocemente a una grande indeterminazione sulla previsione. Matematicamente questo si scrive nella forma:

$$\delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$$

dove $\delta x(t)$ è la distanza delle traiettorie al tempo t, δx_0 la distanza iniziale delle traiettorie e λ è detto *esponente di Lyapunov*. Questo parametro λ dice molto sulla dinamica: infatti, se λ è negativo, $\delta x(t)$ nel tempo tende a diminuire. Le traiettorie si avvicineranno tra loro convergendo e generando ordine. Se λ è positivo si ha un allontanamento esponenziale e quindi caos e disordine. $\lambda = 0$ rappresenta il confine fra ordine e disordine. L'inverso di λ è un tempo e ha il significato del tempo entro il quale è ancora possibile fare una previsione. Per esempio nella meteorologia questo tempo è normalmente dell'ordine della settimana, il che significa che non si possono fare previsioni attendibili oltre la settimana.

È possibile descrivere questi fatti considerando un semplicissimo modello matematico mediante un processo iterativo. Dato un numero reale x compreso fra 0 e 1 si effettua la seguente operazione:

$$\alpha x - \alpha x^2$$

dove α è un numero reale compreso fra 0 e 4. Il risultato ottenuto lo si considera il nuovo valore di x e si ripete l'operazione di calcolo. In questo modo otteniamo una successione di valori che stabiliscono una dinamica. Con meraviglia scopriamo una varietà sorprendente di comportamenti al variare di α. In sostanza otterremo tutto ciò che avevano osservato sia Poincaré che Lorenz. L'evoluzione di un sistema dinamico può essere infatti ricondotta a un'iterazione del tutto simile a quella sopra descritta. È interessante osservare che questa relazione è stata utilizzata con successo per la prima volta nel 1976 dal biologo Robert May per studiare la dinamica delle popolazioni. Da qui il nome *mappa logistica* o *mappa di May*. Un semplice pendolo messo in movimento da una forza periodica presenta comportamenti descritti dalla mappa logistica, al variare dell'ampiezza o della frequenza della forza, dimostrando la generalità del fenomeno. Genera stupore il fatto che la presenza di un comportamento caotico in un oggetto così semplice e familiare limiti le nostre capacità di previsione. Se desiderassimo caratterizzare la dinamica di questo sistema tramite un *diagramma di fase*, ovvero determinare le proprietà del moto al variare dell'ampiezza e della frequenza della forza applicata, non sarebbe sufficiente neppure un tempo infinito, dato che infinitesime variazioni dei valori dei parametri comporteranno una variazione radicale nel comportamento passando da stati periodici a stati caotici e viceversa. Inoltre, le misurazioni dipendono sensibilmente dalla storia del sistema e dalle modalità con cui le misure sono state effettuate. Tale diagramma di fase non avrà più una valenza oggettiva, ma avrà peculiarità soggettive dipendenti dall'osservatore.

Quanto descritto cambia radicalmente il concetto di "realtà" e di "misurazione", dal momento che viene invalidata la statistica ordinaria e la definizione di "errore" basata sul concetto di "varianza". Nella statistica ordinaria la varianza è definita in base alla larghezza delle distribuzioni a forma di campana dette *gaussiane*. In presenza di caos deterministico le distribuzioni non sono gaussiane e la definizione di errore basato sulla varianza perde di significato. In alcuni casi la varianza può risultare addirittura infinita. Ovviamente vi sono zone del diagramma dove permangono le proprietà usuali e tradizionali, che saranno definite nelle regioni a basso contenuto di non-linearità, cioè in presenza di angoli piccoli di oscillazione, come nel caso particolare del pendolo di Galileo.

Il confine tra regioni ordinate e regioni complesse ha proprietà non banali e di tipo *frattale* (Grassberg, Procaccia, 1983; Mandelbrot Benoît, 1987). La frattalità è una proprietà che emerge proprio in questi contesti. Al comportamento caotico sono sempre associate proprietà frattali. Una struttura è frattale quando è *invariante per cambiamenti di scala*: in questo senso il particolare contiene il generale e viceversa. Un esempio classico di frattale è l'aspetto esterno del cavolo romano, oppure la struttura geometrica della felce. I nostri bronchi o i vasi sanguigni sono altri esempi. I frattali sono strutture ordinate, dato che conservano rigorosamente la forma generale della struttura a tutte le scale: in altri termini un frattale visto su scale diverse appare inalterato. Più precisamente un frattale consiste in una struttura ottenuta tramite una sequenza di riduzioni e spostamenti di una forma geometrica di base.

Si comprende allora come un processo *iterativo*, discusso precedentemente, possa generare frattali: iterare consiste, a tutti gli effetti, in un processo analogo a introdurre, una dentro l'altra, delle scatole cinesi. A ogni passo corrisponde una riduzione e uno spostamento, come richiede la formazione dei frattali. La *caoticità* e la *frattalità* sono il prodotto della non-linearità: quindi essa è generatricedi ordine e disordine allo stesso modo. A questi concetti è importante associarne altri due fondamentali, contenuti in quelli precedenti: la *biforcazione* e la *sincronizzazione*. Vedremo che questi saranno alla base del fenomeno di emergenza che discuteremo in seguito.

3.3
Le biforcazioni

Ogni sistema dinamico è caratterizzato da *parametri* la cui variazione determina cambiamenti nel suo comportamento. Per fare un esempio si consideri la percentuale di anidride carbonica nell'atmosfera terrestre. Sappiamo che questa sostanza modifica la temperatura dell'atmosfera per effetto serra. I raggi solari raggiungono il suolo riscaldandolo, ma l'anidride carbonica trattiene parte di questa radiazione determinando la crescita della temperatura dell'atmosfera. Questo aumento, a sua volta, può provocare dei cambiamenti anche drastici, come per esempio lo scioglimento dei ghiacciai o la deviazione della corrente del Golfo. Tali cambiamenti potrebbero modificare l'intero assetto della nostra atmosfera.

In gergo tecnico questa mutazione viene chiamata *biforcazione*, dal momento che il sistema sceglie di evolvere secondo una nuova strada piuttosto che rimanere nella vecchia. La percentuale di anidride carbonica è quindi un valore di controllo, da cui il nome di *parametro di controllo*. Per opportuni valori di tale parametro avviene la biforcazione, determinando la novità.

Ritornando alla mappa logistica, prima introdotta, il parametro di controllo è rappresentato da α: al variare di questo numero si trova una sequenza di biforcazioni ordinate, per poi passare a un comportamento caotico per un valore specifico del parametro di controllo α.

Una trattazione generale della teoria delle biforcazioni fu presentata per la prima volta all'inizio degli anni Ottanta da René Thom (1985). Egli dimostrò che è possibile generalizzare le biforcazioni in solo sette classi comportamentali, da lui definite come: piega, cuspide, coda di rondine, farfalla, ombelico ellittico, ombelico iperbolico, ombelico parabolico. Anche in questo caso il cuore del problema sono le non-linearità che caratterizzano le diverse classi, secondo la forma e il grado delle equazioni considerate.

3.4
Coerenza e autorganizzazione

È importante sottolineare che sinonimo di ordine è la *coerenza*. Questa può essere temporale o spaziale. Un cristallo è un sistema coerente nello spazio ed è caratterizzato da un ordine che condiziona gli atomi a stare in posizioni periodiche ben definite. Un aspetto interessante è la formazione delle strutture ondulate sulla superficie della sabbia nel deserto: queste si formano spontaneamente per effetto dell'azione del vento, quindi questo elemento è la causa principale della formazione delle ondulazioni.

Ci sono un'infinità di esempi di formazioni spontanee di strutture. In sostanza qualunque struttura ordinata deriva da un processo di *autorganizzazione* e trova la massima espressione nei meccanismi che generano la vita (Kaufmann, 1993; Prigogine, 1986). Il nostro corpo è formato da cellule che in base alla struttura caratterizzano i vari organi. Lo stesso DNA presenta sequenze coerenti ma anche sequenze disordinate ed è in continua evoluzione. L'aspetto interessante non è tanto la struttura in sé, ma come essa si realizzi. Naturalmente questo avviene per particolari condizioni dei parametri di controllo. Il tutto è condizionato da *eventi a soglia* o biforcazioni.

Un esempio paradigmatico che da tempo ha affascinato i ricercatori è la formazione di strutture termoconvettive. In piccole dimensioni questo si realizza in una pentola con acqua scaldata dal basso; a grandi scale queste sono le celle termoconvettive dell'atmosfera che condizionano il clima sulla Terra. Moti termoconvettivi si trovano all'interno del nostro pianeta e sono alla base delle derive dei continenti così come del geomagnetismo. Lo stesso Sole e le stelle non potrebbero funzionare senza i loro moti termoconvettivi interni. L'aspetto importante, dal punto di vista strettamente scientifico, è che la termoconvezione è trattabile matematicamente. È possibile fare la previsione sulla soglia di biforcazione al variare della temperatura: un esempio in cui è possibile modellizzare un fenomeno di autorganizzazione e nascita della coerenza.

Si può dimostrare che il meccanismo che genera le ondulazioni sulla sabbia è alquanto simile al meccanismo che genera le celle termoconvettive. Andando oltre, è possibile fare una generalizzazione per molti fenomeni caratterizzati da coerenza. Alla base della modellizzazione vi sono *equazioni differenziali alle derivate parziali*, dove la non-linearità è essenziale nella realizzazione dei fenomeni di coerenza. Nel caso delle ondulazioni sulla sabbia la non-linearità consiste nel fatto che la formazione di un piccolo dosso favorisce l'accumulo di altra sabbia e quindi la crescita ulteriore del dosso.

3.5
La turbolenza

Dallo studio della *fluidodinamica* (Landau, Lifshitz, 2013) i fisici hanno imparato a leggere e interpretare molti altri problemi della natura. La fluidodinamica è una scienza estremamente interessante perché presenta analogie con il funzionamento della natura nella sua globalità. Infatti un fluido può essere in uno stato di quiete e nulla di interessante può essere evidenziato, ma è sufficiente fornire energia per osservare che il fluido diventa sede di nuovi fenomeni, fino a mostrare un'estrema complessità espressa dalla *turbolenza*. Mentre la turbolenza *sviluppata* è caratterizzata da un disordine generalizzato, e quindi descrivibile con leggi statistiche ben definite, la turbolenza debole rappresenta una sfida per lo studioso che si propone di descriverla e di comprenderla. La turbolenza debole precorre quella sviluppata, ma la nascita di strutture sempre più complesse la rendono problematica e difficile.

Nella fluidodinamica si coglie concretamente il significato di *emergenza*, dato che la formazione di pattern complessi si realizza spontaneamente, senza una programmazione da parte dello sperimentatore.

Nella turbolenza l'ordine e il disordine sono elementi essenziali: strutture coerenti emergono da stati disordinati e stati disordinati emergono dall'ordine. In questo contesto le biforcazioni sono gli eventi che danno vita a oggetti nuovi, oggetti che possono organizzarsi in nuove strutture. Un fluido contenuto in un piccolo recipiente, al quale progressivamente si fornisce energia, diventa un mondo in miniatura con complessità crescente. David Ruelle (2003), uno scienziato belga impegnato nello studio della turbolenza, ci fa notare come la scienza abbia fatto dei passi da gigante nella spiegazione del mondo microscopico e del mondo macroscopico. Siamo giunti a rivelare la struttura del nucleo atomico, evidenziando la presenza dei *quark*, gli elementi di base che costituiscono i protoni e i neutroni. Sono state comprese le strutture galattiche e determinata l'età dell'Universo, ma abbiamo capito solo alcuni aspetti della natura della turbolenza che quotidianamente abbiamo sotto i nostri occhi.

Desidero aggiungere che forse alcuni problemi che si affacciano all'orizzonte della scienza moderna derivano da questi nostri limiti nella conoscenza dei fenomeni di turbolenza. Il nodo sembra proprio questo stretto rapporto fra ordine e caos presente nella turbolenza. In molti casi la comparsa spontanea della struttura che emerge dal disordine è ancora un fenomeno lontano dall'essere compreso. Al momento possiamo risolvere alcuni problemi circoscritti, come il valore della prima soglia nella formazione delle instabilità termoconvettive e simili. I fenomeni cooperativi, gli effetti di memoria e di autorganizzazione ci obbligano ad abbandonare l'impostazione riduzionista. Senza dubbio il fenomeno della nascita della coerenza è una chiave di lettura determinante nella comprensione del concetto *non-riduzionista* di emergenza. Una struttura coerente può essere estesa, come nel caso di un cristallo, ma anche localizzata. Di seguito si considera un modello relativamente semplice che descrive la struttura localizzata e che assume la forma di oggetti chiamati *solitoni*.

3.6
Stati coerenti localizzati: i solitoni

La storia dei solitoni ci porta a un evento avvenuto nella prima metà dell'Ottocento, quando un ufficiale della marina scozzese, John Scott Russell, osservò uno zatterone trainato da cavalli in un canale. Il barcone urtando l'argine generò un'onda speciale che l'ufficiale seguì a cavallo per varie miglia. Più tardi, alla fine dell'Ottocento, Diederik Korteweg e Gustav de Vries (Drazin, Johnson, 1989; Korteweg, Vries, 1895), fornirono la spiegazione del fenomeno dal punto di vista matematico e questo oggetto prese il nome di "solitone", proprio perché si presentava come una perturbazione solitaria. Questo oggetto si distingue dalle onde ordinarie perché è il prodotto di un fenomeno di competizione fra la *dispersione* delle onde e la *non-linearità*. Il solitone si genera in condizioni di acque con basso fondale, come in un canale o in prossimità della battigia in riva al mare. In effetti, se si osserva la dinamica dell'onda marina, questa si comporta come un'onda ordinaria lontano dalla battigia, ma quando la perturbazione si avvicina alla costa vediamo che questa si innalza assumendo un profilo che in sezione è a forma di campana. In questa fase siamo proprio in presenza del solitone. Quando questo raggiunge la riva, la sommità dell'onda si piega in avanti e si frange. Il fatto di frangersi è conseguenza della presenza della non-linearità causata dal basso fondale, perché – si può dimostrare – questo comporta una velocità maggiore dell'onda sulla sommità. Quindi l'effetto della non-linearità ha come conseguenza quello di stringere la perturbazione mentre la dispersione tende ad allargarla. Non linearità e dispersione sono in competizione, ma per un'opportuna profondità del fondale i due effetti si equilibrano e generano il solitone.

L'aspetto matematico rilevante dei solitoni è che essi rappresentano una soluzione *esatta* delle equazioni differenziali non-lineari che li descrivono. Normalmente la non-linearità comporta la perdita di soluzioni esatte che, come abbiamo detto in precedenza, è alla base dell'esistenza di soluzioni caotiche. In certi casi la stessa non-linearità genera soluzioni esatte che, se localizzate, prendono il nome di solitoni e assumono la proprietà di *stati coerenti localizzati*. Si può dimostrare che i solitoni non sono solo oggetti fluidodinamici ma si trovano in ambienti molto diversi, a condizione che le proprietà dinamiche soddisfino particolari vincoli matematici.

Occorre distinguere i solitoni dalle onde solitarie. I primi sono *stabili*, nel senso che due solitoni interagenti dopo l'urto mantengono la propria forma. Le onde solitarie, invece, possono subire modificazioni per interferenza. Solitoni possono essere formati nelle fibre ottiche mentre onde solitarie sono, per esempio, gli impulsi nervosi. Infatti la propagazione dell'impulso nervoso non ha le caratteristiche di un impulso elettrico ordinario, dove si propagano cariche elettriche. Nel segnale nervoso si propaga una polarizzazione delle cellule determinata da una diversa concentrazione di ioni. La membrana delle cellule contiene delle porte ioniche o canali ionici che modificano le concentrazioni. Secondo il modello di Hodgkin-Huxley (Hodgkin, Huxley, 1952), l'osmosi genera una differenza di potenziale fra l'interno e l'esterno della membrana, chiamato potenziale di azione. Quindi nell'impulso nervoso si propaga questo potenziale di azione.

Il meccanismo è simile al fenomeno delle tavolette del domino. Supponete di realizzare una sequenza di tavolette posizionate in verticale: se la distanza fra le tavolette è tale che la caduta di una di esse generi la caduta della prossima vicina, la caduta si propagherà, inesorabilmente, per l'intera catena. Questo esempio, naturalmente, ha un valore esplicativo ma fornisce un'idea intuitiva, spiegando come le perturbazioni solitoniche possano propagarsi. In ogni caso, dietro i solitoni e le onde solitarie ci sono modelli matematici caratterizzati da equazioni alle derivate parziali che ammettono specifiche *soluzioni coerenti*. Solitoni e onde solitarie si trovano in ogni campo o disciplina delle scienze.

3.7
La sincronizzazione

Un modo diverso per caratterizzare la formazione della coerenza e quindi la realizzazione di un ordine è quello di interpretare la formazione di questi stati come il risultato di un processo di *coordinamento* e di *sincronizzazione*. Come abbiamo già accennato spiegando la formazione dei pattern convettivi, questi risultano come conseguenza di un coordinamento delle molecole del fluido, che formano strutture periodiche chiamate celle. Coordinamento è sinonimo di sincronizzazione, un fenomeno descrivibile con semplicità se consideriamo due orologi interagenti. Nel

1700 Christiaan Huygens (Bennett *et al.*, 2002; Strogatz, 1994) scoprì che se due orologi a pendolo venivano posti abbastanza vicini questi si accordavano procedendo in sincronia, ovvero le oscillazioni dei pendoli mantenevano la stessa differenza di fase. Non è banale dimostrare come questo avvenga, ma intuitivamente è comprensibile se immaginiamo di camminare sopra un ponte che oscilla per effetto del vento. L'unico modo per non subire la destabilizzazione del nostro passo è quello di accondiscendere al moto del ponte, ovvero di marciare con lo stesso ritmo delle oscillazioni, altrimenti rischiamo di cadere. Questo si traduce in un principio di *minimizzazione della perturbazione* fra i pendoli, che si realizza con la sincronizzazione.

Partendo da questo semplice esperimento si scopre che la rilevanza di questo fenomeno è notevole. Per dare un esempio basti pensare al ruolo della sincronizzazione nella dinamica neurale. Il nostro pensiero è profondamente connesso con la sincronizzazione, dato che gli eventi alla base della percezione sono essenzialmente riconducibili alla sincronizzazione di gruppi di neuroni. Quindi il pensiero a livello basale è da considerarsi un susseguirsi di processi coerenti fondati sulla sincronizzazione. Altri esempi riguardano la sincronizzazione dei lampi luminosi delle lucciole, il canto delle cicale e il volo degli stormi, o il comportamento collettivo dei banchi di pesci. È possibile avere sincronizzazione fra sistemi che hanno frequenze proprie molto diverse. In questo caso la sincronizzazione avviene mediante il bloccaggio tra frequenze che stanno in un rapporto pari al rapporto di numeri interi, come per esempio 2 a 3 o 3 a 5. Sono stati fatti esperimenti controllando la frequenza del battito cardiaco e la frequenza della respirazione in un atleta sotto sforzo. È stato verificato che in certe condizioni il battito del cuore si pone in sincronia con la respirazione, con un rapporto 1 a 5, ovvero per ogni respiro corrispondono quasi esattamente 5 battiti del cuore.

Un aspetto ancora non molto studiato ma particolarmente affascinante è la *sincronizzazione caotica*. Questa si verifica quando due o più sistemi caotici interagiscono opportunamente. Singolarmente i sistemi sono caotici, ma mantengono una fase relativa costante fra loro. Questo comportamento ha trovato applicazione anche nella crittografia dei segnali. Due dispositivi elettronici comunicano nascondendo il messaggio segreto nella fluttuazione caotica sincronizzata. Naturalmente, viene spontaneo chiedersi cosa comporti questo tipo di sincronizzazione se si considera la dinamica neurale. Al momento ci sono pochi studi sull'argomento e la questione è un elemento di frontiera.

3.8
Coerenza e disordine nella meccanica quantistica

La *fluttuazione* è alla base della meccanica quantistica (Dirac, 1971; Ghirardi, 2009), tanto che le sue leggi sono di natura fondamentalmente probabilistica. Con questa teoria si perde il concetto deterministico di *traiettoria* e la previsione è statistica. L'*equazione di Schrödinger* permette di trovare la distribuzione delle velocità o delle posizioni delle particelle, ma è impossibile determinarne i valori esatti in termini deterministici. Eppure nella teoria si distingue fra *stati coerenti* e *stati incoerenti*. Lo stato di equilibrio quantistico è caratterizzato da un ordine espresso dalla cosiddetta *funzione d'onda*. Onda è sinonimo di coerenza. A una particella che si muove liberamente nello spazio è associata un'onda armonica. Un'onda armonica ha una fase ben definita. Il quadrato del modulo dell'ampiezza dell'onda ci fornisce la probabilità di trovare la particella nello spazio.

Coerenza e fluttuazione sono intrinsecamente connesse, nel senso che una sistematica misurazione della posizione ci porta a una sequenza di punti nello spazio con successione casuale, ma che alla fine disegnano una struttura ordinata ricollegabile alla funzione d'onda. Un aspetto curioso è che questa proprietà non è una caratteristica solo della meccanica quantistica. Se consideriamo un sistema classico in presenza di caos deterministico, l'*attrattore strano* ha una struttura frattale, e quindi coerente, ma la realizzazione della figura avviene tramite una sequenza di punti con posizioni singolarmente imprevedibili.

L'attrattore strano è un insieme di punti in un piano che interseca le traiettorie descritte dalla dinamica. Per esempio, se consideriamo il moto della Terra intorno al Sole, l'attrattore strano non è altro che l'intersezione delle orbite della Terra su un piano perpendicolare alla sua traiettoria. Nel caso di moto perfettamente *periodico* l'attrattore è un unico punto, perché la traiettoria è chiusa, ma nel caso di moto *caotico* l'intersezione è data da più punti, che generano un insieme. Come dimostrò Poincaré, la traiettoria terrestre non è chiusa e, nella scala dei tempi geologici, l'intersezione genererà un attrattore frattale. Il passaggio da quantistico a classico avviene a causa della perdita di coerenza degli stati quantistici. Questa perdita deriva dagli effetti delle perturbazioni dovute all'interazione con il mondo esterno e che inevitabilmente distruggono la coerenza. Recentemente sono stati realizzati degli oggetti quantistici macroscopici. Esempi significativi sono i *condensati di Bose-Einstein* (Peliti, 2003). Mediante la radiazione laser è possibile raffreddare una nube di atomi a temperature prossime allo zero assoluto. In questa condizione la nube condensa e diventa un unico oggetto quantistico coerente. Due condensati che interagiscono danno luogo a fenomeni di interferenza come la sovrapposizione fra onde.

3.9
Entropia e complessità

Quando si parla di disordine è naturale riferirsi all'*entropia* (Peliti, 2003) come misura di questo disordine. L'Universo nella sua globalità presenta un'entropia assoluta crescente: da ciò l'affermazione che il destino dell'Universo è la "morte termica". Quindi si dice che l'entropia è una *funzione di stato*, ovvero una quantità che caratterizza lo stato del sistema. In particolare l'entropia esprime il grado di disordine.

Un Universo vecchio è più disordinato di un Universo giovane, ma se ci riferiamo alle strutture che si realizzano internamente al nostro Universo, le galassie, le stelle, i sistemi planetari, la Terra e la vita stessa sembrerebbero in contraddizione con la "morte termica". Osservando la vita in particolare si nota anche in questo caso una crescita, ma questa volta una crescita di ordine e non di disordine, come testimoniato dal processo evolutivo darwiniano. Dai batteri si è passati agli esseri viventi più complessi, potremmo dire fino all'emergenza nella specie umana del pensiero autocosciente, dell'organizzazione sociale, dello sviluppo tecno-scientifico e culturale. Quindi nel tempo le strutture, conseguenza di un processo autorganizzativo, diventano sempre più complesse e quindi più ordinate.

La contraddizione è stata rimossa da Ilya Prigogine (1986) affermando che l'ordine si realizza e cresce localmente, ma a una riduzione *locale* dell'entropia corrisponde una maggiore crescita di entropia *globale*. Così i conti tornano, la formazione della struttura comporta in ogni caso un aumento totale di disordine, anche se localmente si ha una riduzione.

Ci sono varie definizioni di entropia. Dal punto di vista *termodinamico* è possibile misurare la variazione di entropia come il calore assorbito o emesso diviso per il valore della temperatura assoluta del sistema considerato. Questa definizione ha un'utilità pratica ma, alla base, l'entropia deriva da una definizione *statistica* che la generalizza. Essenzialmente l'entropia si può definire come il logaritmo naturale del numero di stati possibili che può assumere il sistema se i singoli stati sono equiprobabili. Per fare un esempio possiamo considerare tre oggetti A, B e C che dobbiamo sistemare all'interno di una scatola con due scomparti, S1 e S2. Possiamo considerare un certo disordine associato a questo sistema immaginando che gli oggetti possano occupare in modo diverso e casualmente i due scomparti. Uno stato possibile consiste nella presenza di A in S1, B e C in S2. Ma un altro stato consiste in B e C in S2 e A in S1. Ora, un altro stato si ottiene con B in S1, A e C in S2. Continuando con questa numerazione si scopre che gli stati possibili sono in tutto sei. Quindi l'entropia associata a questo sistema è il logaritmo naturale di 6.

Se si considerano scatole con più scomparti e un numero maggiore di oggetti da sistemare, l'entropia complessiva risulterà più grande. Si può dimostrare che la scelta del logaritmo deriva dal fatto che vogliamo che l'entropia di due sistemi sia uguale alla somma delle due entropie. Se le realizzazioni non sono equiprobabili ma avvengono con probabilità p_i allora l'entropia assume la forma:

$$S = -\sum_i p_i ln p_i$$

dove la somma è estesa a tutti gli N stati possibili. Il segno meno anteposto alla sommatoria deriva dal fatto che il logaritmo di una probabilità è sempre negativo, mentre l'entropia assoluta di un sistema è sempre positiva o al limite nulla. Da notare che se le p_i sono tutte uguali e quindi $p_i = \frac{1}{N}$ si ottiene la definizione di entropia descritta precedentemente. Infatti in questo caso si ha:

$$S = -\,ln \frac{1}{N} = lnN$$

Come abbiamo detto, l'entropia è una grandezza che deriva da considerazioni statistiche. Normalmente un sistema deterministico non è caratterizzato dalla casualità e non avrebbe senso riferirsi a una statistica. In particolare, per un sistema ordinato, l'entropia risulterebbe nulla. In realtà per un sistema che presenta caos viene rovesciata l'interpretazione precedente, assegnando un'entropia anche a un sistema deterministico. Infatti, data l'estrema sensibilità alle condizioni iniziali, nella pratica il caos deterministico è un processo *irreversibile* e quindi caratterizzabile in termini statistici. Questo è un aspetto rivoluzionario che ha determinato un concetto nuovo di entropia, dato che è sensato e possibile associare un'entropia alle traiettorie di evoluzione di un sistema deterministico. Naturalmente traiettorie periodiche e ordinate hanno entropia nulla. Yakov Pesin ha connesso gli esponenti di Lyapunov con l'entropia statistica, dando così la possibilità di determinare l'entropia di un sistema mediante l'analisi delle traiettorie. Dato che gli esponenti di Lyapunov esprimono il grado di caoticità delle traiettorie, Pesin deduce una proporzionalità diretta tra entropia e il valore degli esponenti di Lyapunov. Infatti in un sistema caotico gli esponenti di Lyapunov esprimono il grado di divergenza delle traiettorie, fornendo una misura della perdita di informazione e quindi una misura dell'entropia.

3.10
Network

L'ordine appare localmente tramite un processo emergente, nonostante una crescita del disordine a livello globale. Come già espresso nei paragrafi precedenti, la chiave di lettura è la non-linearità. Essa è responsabile dell'*evoluzione* ma anche del degrado e della crescita del disordine. Per non-linearità ci possiamo riferire alla non-linearità delle equazioni che descrivono la dinamica, ma è possibile definirla anche in termini di interazione fra entità discrete. Si pensi per esempio alla società umana, i cui elementi sono gli individui, ed è proprio attraverso i collegamenti, le relazioni umane, che si sviluppa la società. Un essere vivente è costituito da elementi che sono le cellule, ed è proprio grazie alle relazioni fra cellule che l'organismo si realizza. Internet è un altro esempio. In linea di massima, qualunque entità descritta da siti interconnessi prende il nome di *network*. La non-linearità può essere presente sia nei siti che nei collegamenti. È ben noto come i network possano evolvere in strutture ordinate o in strutture disordinate relativamente al ruolo e al contributo della non-linearità.

Quindi sia che la descrizione avvenga in base a elementi discreti, come nei network, sia attraverso sistemi di equazioni differenziali, disordine e coerenza sono proprietà che scaturiscono dalla presenza della non-linearità. Dalle analisi statistiche dei network risulta che, nella maggior parte dei casi, essi presentano delle proprietà frattali (Albert, Jeong, Barabási, 1999). Nell'esempio della rete Internet, se valutiamo il numero di collegamenti per sito, si trova che il numero dei siti con K connessioni decresce con una legge a potenza inversa di K. In sostanza, i siti con un alto numero di collegamenti sono concentrati nel 20% del totale. Questa prende il nome di *legge di Pareto*, valida anche per la statistica della distribuzione della ricchezza economica nella popolazione umana. La ricchezza è concentrata solo nel 20% della popolazione mondiale. Come abbiamo già discusso, la frattalità è una prerogativa dei sistemi dinamici, ma in questo caso la frattalità ci dice qualcosa di più: essa è il sintomo della presenza di autorganizzazione. I sistemi che presentano queste proprietà sono sistemi in evoluzione e in crescita strutturale, dove progressivamente la *casualità* lascia il passo all'*organizzazione*, un fenomeno caratteristico dei processi vitali.

3.11
Conclusioni

Attraverso lo studio e la riflessione su ciò che coinvolge l'ordine e il disordine, una parte degli scienziati ha acquisito un nuovo punto di vista sulla natura. Si è diffuso un atteggiamento non-riduzionista, per non dire "olista". Si è capito che conoscere la formula matematica che descrive il fenomeno non significa conoscere e capire il fenomeno. Scrivere la formula è un punto di partenza importante, ma le conseguenze che questa genera possono anche essere inafferrabili. Scrivere la formula non significa conoscere gli sviluppi del fenomeno. La non-linearità ha un ruolo importante nella realizzazione sia del disordine che dell'ordine. Proprio attraverso il passaggio all'ordine si realizza il processo di emergenza. La comparsa della struttura avviene tramite una biforcazione. Una successione di biforcazioni rende la struttura sempre più complessa, nel contempo l'ambiente esterno aumenta il grado di disordine, quantificabile con la misura della variazione di entropia. Una considerazione particolare è riservata al concetto di *caos deterministico*, che ha proprietà frattali e multifrattali, pur rimanendo impredicibile. Non è necessario avere infiniti gradi di libertà, come nei sistemi puramente stocastici, per perdere le capacità di previsione. Anche un sistema basso-dimensionale può presentare dinamiche irreversibili.

4

Su Turing, gli algoritmi, le macchine, la prevedibilità

di *Luca Bellotti*

4.1
Alan M. Turing (1912-1954): una brevissima biografia

Alan Mathison Turing fu forse il primo matematico a porsi esplicitamente il problema se le macchine possano pensare, e a lavorare sistematicamente su di esso. Ma i suoi interessi e i suoi contributi hanno un raggio molto ampio, per cui può definirsi senz'altro "un filosofo naturale" (Hodges, 1983).

Nato a Londra il 23 giugno 1912, Turing cresce in un ambiente di alta borghesia legata alle colonie, un ambiente ben presto rifiutato (come è testimoniato, tra l'altro, dai suoi insuccessi scolastici). Ancora adolescente, scrive un «breve saggio sulla natura dello spirito». A partire dalle note tesi di Eddington, secondo cui la meccanica quantistica lascerebbe aperta la possibilità di una volontà libera, qui Turing si pone forse per la prima volta la questione di come un insieme di atomi possa essere una macchina pensante. Studia a Cambridge, principalmente matematica pura, ma con interessi molto vasti. Si interessa a un certo punto ai fondamenti della logica (forse a partire da problemi riguardanti la meccanica quantistica). Incontra così il *problema della decisione* (formulato da Hilbert alcuni anni prima): stabilire se esiste un *metodo definito* mediante il quale si può determinare se un enunciato della logica elementare è un teorema o no. Comprende subito la necessità di un'analisi della nozione di metodo definito, per poter avere risultati negativi.

Nel 1936, esce il suo articolo epocale *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* (Turing, 1936), dove viene presentata per la prima volta l'idea di quella che poi sarà chiamata "macchina di Turing" (cfr. *infra*). Il problema di base è come si possa specificare l'infinito in termini finiti, e il punto di partenza è il paragone tra un uomo che calcola e una macchina capace di un numero finito di configurazioni. Turing elabora un modello del lavoro svolto nel calcolo dalla mente umana, modello che in seguito viene realizzato da una macchina. L'idea-chiave, da un punto di vista matematico, è la codificazione delle macchine mediante numeri naturali, che permette di diagonalizzare e di ottenere l'insolubilità effettiva del *problema della terminazione*. Viene anche formulata quella che poi si chiamerà "tesi di Turing": l'identificazione della computabilità effettiva con la computabilità mediante macchine di Turing. C'è un'evidente analogia con la (coeva) tesi di Church. Nel caso di Turing, tuttavia, c'è un tentativo (riuscito) di analisi concettuale della nozione stessa di *computo*, tanto che Gödel rimase pienamente convinto soltanto dall'analisi di Turing. Dal punto di vista della nascita dell'informatica, la nozione forse più importante che viene presentata è quella di *macchina universale*: si tratta di un interprete universale, che fa lavorare sugli *input* i programmi che le vengono dati, esattamente come un moderno computer (salvo limitazioni di memoria); è, come si dice, *all-purpose*.

A Princeton, negli anni seguenti, Turing lavora sul problema della *verità degli enunciati indecidibili*, elaborando (per primo) una forma delle cosiddette "logiche ordinali" (cfr. Davis, 1965). Nel sottolineare che ci sono due facoltà in matematica, *intuizione* (non algoritmica) e *ingegno* (parzialmente algoritmico), sembra esserci qui da parte di Turing un'apertura (caso forse unico nei suoi scritti) verso l'idea che nell'intuizione la mente possa attingere qualcosa che sfugge all'ambito del computabile. Nel 1938 Turing frequenta il corso di Wittgenstein a Cambridge. È evidente la stima di Wittgenstein per Turing, ma d'altra parte la quasi totale incomunicabilità tra i due, come è testimoniato dalle celebri discussioni sul problema della contraddizione nascosta in un sistema formale (Turing: «un ponte potrebbe crollare»). Nel periodo successivo Turing pubblica soprattutto su problemi di analisi e algebra; la logica rimane piuttosto marginale.

Emerge a questo punto un notevole interesse per l'ingegneria, che porterà Turing alla costruzione delle prime macchine, essenzialmente a fini di crittografia. Dalla fine del 1938, Turing lavora infatti per i servizi segreti britannici (nel famoso laboratorio segreto di Bletchley Park, in cui per la prima volta la criptanalisi diventa una materia scientifica) alla decrittazione del codice tedesco Enigma, usato per le comunicazioni militari. Il suo contributo in questo campo è, di nuovo, epocale: la decrittazione dell'Enigma (mediante l'invenzione di una macchina adatta a questo scopo – la "Bomba" – che partiva da ipotesi errate, via via raffinandole), con la conseguente possibilità di lettura delle comunicazioni dei sottomarini tedeschi.

Dopo la guerra (cfr., per i lavori di tutto questo periodo, Turing, 1992), Turing contribuisce in modo decisivo alla realizzazione fisica di alcuni tra i primi computer. Si tratta di macchine in cui, in modo rivoluzionario rispetto al passato, dati e programmi sono considerati alla pari, come simboli memorizzabili e manipolabili. Forse è nei primi anni Quaranta che Turing abbandona l'idea dell'intuizione come facoltà che va al di là del computabile; in ogni caso, si rende conto che l'ambito del computabile è molto più ampio del previsto, e suppone di potervi includere tutto ciò che fa il cervello, anche ciò che si dice frutto di creatività. Presso il *National Physical Laboratory* (NPL) nel 1946 Turing elabora il progetto dell'ACE, un computer con 32 kilobyte di memoria, sottolineando che la macchina potrebbe mostrare intelligenza, a patto che possa fare a volte gravi errori; ma il progetto non viene realizzato. Nel 1948, formula l'idea che si debba unire alla disciplina lo spirito di iniziativa, per poter produrre l'intelligenza, ed elabora alcune anticipazioni delle *reti neurali* ("macchine non organizzate"); si dimette poi dal NPL.

In seguito, Turing lavora a Manchester. Nel 1950, in un altro classico lavoro, *Computing Machinery and Intelligence* (cfr. Turing, 1992), formula esplicitamente l'ipotesi che il cervello sia una *macchina a stati discreti*, le cui operazioni sono tutte computabili; anticipa inoltre il *funzionalismo* (la tesi dell'irrilevanza della realizzazione fisica). La questione che viene posta è: possono pensare le macchine? La risposta viene data mediante il celebre "gioco dell'imitazione", in cui si tratta di distinguere (solo mediante domande) un interlocutore umano da una macchina. Vengono considerate varie obiezioni, ad esempio quella teologica, o quella della percezione extrasensoriale; più seria è l'obiezione della consapevolezza (a cui viene rivolta la contro-obiezione del solipsismo). In seguito sarà considerata centrale (in particolare da Searle) la questione dell'*intenzionalità*, cui si può rispondere insistendo sul fatto che il sistema nel suo complesso fa quello che le sue singole parti non fanno. Turing considera esplicitamente macchine capaci di apprendere, la questione dell'interazione delle macchine con il mondo esterno, e la possibile "continuità" del sistema nervoso umano. Sono note le obiezioni di Roger Penrose (cfr., ad esempio, Penrose, 1994) alle argomentazioni di Turing: secondo Penrose, il funzionamento del cervello è spiegabile in modo puramente fisico, ma andando necessariamente al di là del computabile (coinvolgendo, sostanzialmente, la riduzione della funzione d'onda della meccanica quantistica). Ma Penrose considera irrilevante il problema dell'interazione con il mondo (se il mondo è computabile, è infatti simulabile da una macchina), mentre Turing lo considera fondamentale. Turing sottolinea che l'uomo, anche se può di volta in volta ottenere risultati matematici che la macchina non può ottenere (ad esempio rispetto ai sistemi formalmente incompleti), non può comunque "trionfare" simultaneamente su tutte le macchine. Bisogna concedere alla macchina di giocare ad armi pari: la macchina deve poter sbagliare (se è infallibile, non può essere intelligente); ma Penrose non accetta proprio questo punto (l'intelligenza, secondo lui, è vedere la verità). Turing formula infine la previsione che in cinquant'anni si sarebbero avuti computer con memoria di 1 gigabyte, tali da rendere non banale il gioco dell'imitazione.

A partire dal 1950, Turing si interessa di problemi biologici, in particolare del problema della *morfogenesi*, formulando equazioni chimiche differenziali *non-lineari*, anticipando così in qualche modo certi sviluppi successivi della dinamica dei sistemi caotici. Negli stessi anni, inizia a pensare alla possibilità di una nuova teoria dei fenomeni quantistici, con aspetti di non-linearità. Ma ben presto ha inizio la sua catastrofe personale: per una sfortunata vicenda sentimentale, Turing viene arrestato per omosessualità e costretto a curarsi, tenuto sotto controllo per la sua ricattabilità e per le informazioni segrete che poteva avere. Si suicida il 7 giugno del 1954. L'ultimo suo articolo, divulgativo, accenna all'inadeguatezza della ragione quando non sia sostenuta dal buon senso. Se dovessimo individuare il tratto più caratteristico e costante della personalità umana e scientifica di Turing, forse potremmo identificarlo (con Hodges) nel suo senso di meraviglia per la natura.

4.2
Una digressione: Penrose contro Turing

Alle argomentazioni che Penrose (1994) presenta sulla rilevanza dei teoremi di incompletezza di Gödel al fine di mostrare che la mente non è una macchina, si può obiettare che il primo teorema di incompletezza può essere riformulato semplicemente nel modo seguente (l'obiezione si può attribuire a Martin Davis): esiste un algoritmo che, dato un qualunque insieme coerente di assiomi, produce un'equazione polinomiale che non ha soluzioni nei numeri naturali, ma tale che questo fatto non può essere dedotto dagli assiomi. Il problema (contro Penrose) è che per "intuire" la *verità* (nel modello standard) dell'enunciato indecidibile di Gödel, è necessario assumere l'ipotesi di *coerenza*, e sulla coerenza di un sistema formale l'intuizione può essere del tutto fallace (come mostrano molti casi nella storia della logica, anche recente). Inoltre, Penrose chiama "intuizione" l'implicazione dalla coerenza del sistema formale considerato alla verità del suo enunciato di Gödel, ma questa implicazione è semplicemente un teorema, dimostrabile nell'aritmetica. Gödel, come è noto, faceva derivare dal suo teorema il seguente dilemma (per poi argomentare, certo, a favore della sua prospettiva platonista, ma su basi indipendenti): o la mente è meccanica, equivalente a una macchina di Turing, e allora c'è un enunciato assolutamente indecidibile; oppure c'è un irriducibile aspetto non meccanicistico nell'intelligenza. Su questa base, si può plausibilmente sostenere, contro Penrose, che il problema se l'intuizione matematica sia il prodotto di un processo algoritmico è interessante e per niente banale, e che tuttavia il teorema di Gödel non ci dice nulla al riguardo.

4.3
Algoritmi

Al fine di ottenere il pieno dominio matematico (e quindi scientifico) di un certo ambito concettuale, uno dei modi più diretti è quello di individuare *classi di problemi* tali che ciascuna classe possa essere trattata mediante un *algoritmo*. In prima approssimazione, un algoritmo è una *procedura generale* tale che, per ogni questione appropriata (in un certo ambito di problemi), la risposta può essere ottenuta facendo uso di una semplice *computazione* secondo un *metodo* specificato. Una procedura *generale*, o meglio *effettiva*, è un processo la cui esecuzione è chiaramente specificata fino ai minimi dettagli. Questo significa, in primo luogo, che dobbiamo poter esprimere le *istruzioni* per l'esecuzione del processo in un testo di lunghezza *finita*. Inoltre, le procedure che qui chiamiamo "effettive" sono quelle in cui il modo di procedere è *completamente privo di ambiguità*: saranno escluse, ad esempio, quelle procedure in cui non è determinato in quale *ordine* le regole debbano essere applicate. In matematica abbiamo frequentemente a che fare con *funzioni* tali che esiste un algoritmo, che termina dopo un numero finito di passi, che produce, per ogni argomento, il rispettivo valore della funzione. Tali funzioni sono dette *intuitivamente computabili*. Esempi di funzioni che sono intuitivamente computabili sono l'addizione tra numeri naturali, la moltiplicazione tra numeri naturali e l'elevamento a potenza tra numeri naturali. In tutti e tre i casi possiamo calcolare, dato un tempo sufficiente, il risultato dell'operazione applicata a due numeri naturali dati, seguendo un algoritmo opportuno. Il problema generale è di determinare una nozione di *computabilità effettiva* che dia *realtà matematica* alle nostre più o meno vaghe intuizioni sulla calcolabilità, sostituendole con un concetto rigoroso.

Non entriamo qui nella complessa questione di che cosa sia un algoritmo (cfr. ad esempio Moschovakis, 1998), e ci limitiamo a una caratterizzazione intuitiva e piuttosto vaga, sufficiente ai nostri scopi. In generale, un algoritmo è una procedura *canonica*, *deterministica*, che può essere applicata a una certa classe di ingressi (*input*) simbolici e che porta, alla fine, per ogni ingresso, a una corrispondente uscita (*output*) simbolica.

Proviamo a formulare in modo più preciso alcune condizioni che valgono per questa nozione, *informale*, di algoritmo. Nel considerare queste condizioni, si tenga sempre presente qualche esempio di attività di calcolo. Si calcola, o comunque si eseguono procedure effettive, anche in casi molto banali: ad esempio, quando si esegue una semplice addizione per verificare un conto, o addirittura quando si cerca un numero telefonico; in generale, ciò avviene in tutti i casi in cui si compie una qualsiasi di quelle che comunemente si chiamano operazioni di *routine*. Avendo in mente qualche esempio di questo genere, non è difficile riconoscere che le condizioni che ora presentiamo sono requisiti del tutto ragionevoli e plausibili su che cosa debba considerarsi un algoritmo.

1. Tanto per cominciare, l'insieme delle istruzioni per un dato algoritmo deve essere di dimensioni *finite*. È chiaro che se insegniamo a qualcuno una procedura di *routine* per svolgere un certo compito, le nostre spiegazioni devono avere un limite ben preciso, spazialmente o temporalmente: devono essere *discrete*, in modo da essere riconoscibili, e *finite*, in modo da non richiedere uno spazio o un tempo infinito per essere enunciate.
2. È evidente che deve esistere un *agente* che calcola, che reagisce alle istruzioni ed esegue i passi della procedura effettiva considerata. L'agente può essere un uomo, una macchina, o qualche altra entità; ma qualcuno o qualcosa che esegue la procedura deve esserci per forza.
3. Devono esistere funzioni per la *creazione*, la *memorizzazione* e il *reperimento* dei passi di un calcolo. Questo diventerà più chiaro quando considereremo lo specifico modello di computabilità costituito da quei computer astratti che sono le macchine di Turing (cfr. *infra*), ma dovrebbe essere chiaro che in ogni caso, anche quando non si usano carta e matita, la nostra *memoria* è ciò che rende possibile in generale un *ordine* in quello che facciamo, impedendo la più completa confusione, che renderebbe impossibile l'esecuzione di qualsiasi operazione.
4. Quando parliamo di algoritmi, ci riferiamo a calcoli che vengono eseguiti in passi *discreti*, senza utilizzare metodi in cui entrino in gioco fenomeni continui o dispositivi analogici.
5. Infine, il calcolo deve essere eseguito in modo *deterministico*, senza ricorrere a metodi o dispositivi casuali (come un lancio di dadi o le estrazioni del lotto). È vero che inserire elementi casuali può essere interessante e del

tutto lecito, ma in generale non siamo disposti a riconoscere e ammettere come un modo di procedere propriamente algoritmico, ovvero strettamente di *routine*, una procedura in cui si faccia ricorso a elementi casuali.

Già con queste poche condizioni, abbiamo individuato un concetto abbastanza ben delimitato. È sufficiente pensare a qualunque comune computer, per vedere che esso soddisfa tutti i requisiti che abbiamo posto, e che a ogni punto elencato corrisponde un aspetto del suo modo di operare: al punto (1) corrisponde il programma, al (2) gli elementi logici (i circuiti), al (3) la memoria, al (4) la natura digitale del dispositivo, al punto (5) la natura deterministica (in senso forte, benché ovviamente si tratti di fenomeni elettronici) delle sue operazioni. È chiaro che per arrivare a una controparte *formale* del concetto di algoritmo che abbiamo individuato non possiamo fermarci qui: dovremmo innanzitutto specificare le espressioni simboliche che possono essere accettate come istruzioni e quelle che possono essere accettate come ingressi e uscite; dovremmo inoltre stabilire con precisione e in modo uniforme come le istruzioni e gli ingressi determinino il calcolo, e come debba essere codificata l'uscita. Ma ora è più urgente esaminare ulteriori condizioni, meno ovvie delle precedenti, che vengono abitualmente poste come vincolanti per la nozione di operazione algoritmica. Ci si potrebbe chiedere, infatti, a ragione:

6. Deve esserci un limite finito alle dimensioni degli ingressi?
7. Deve esserci un limite finito alle dimensioni di un insieme di istruzioni?
8. Deve esserci un limite finito alla quantità di spazio di memoria disponibile?

Alle prime due domande (6 e 7) è naturale rispondere *negativamente*: se vogliamo affrontare matematicamente il problema dell'effettività, ci interessa quello che è possibile *in linea di principio*. È vero che quest'ultima nozione si presta a un'interminabile discussione filosofica, ma qui assumiamo semplicemente che, almeno nella teoria *generale* della computabilità, non si impongano quei limiti che sarebbero senz'altro giustificati da punti di vista diversi, sia teorici che pratici. La teoria della computabilità riguarda l'esistenza o non esistenza di metodi computazionali, non problemi come l'efficienza o la progettazione, che sono problemi importantissimi e di grande interesse anche teorico, e che tuttavia possono essere affrontati solo quando già si sia stabilito il contesto matematico generale della teoria *astratta* della computabilità. Così, la risposta sarà negativa anche alla terza domanda (8), benché nessuno si sogni di negare che i computer fisicamente esistenti sono legati alla memoria disponibile, che è comunque finita. Una domanda vicina alle precedenti, ma con una sfumatura leggermente diversa è questa:

9. Deve esserci un limite finito fissato alla capacità o all'abilità dell'agente di calcolo?

Qui la risposta è positiva, e questo non dovrebbe sorprendere, in quanto il nostro obiettivo sono le operazioni di routine, che per loro natura non possono richiedere capacità troppo idealizzate da parte dell'agente di calcolo. Introducendo le macchine di Turing (cfr. *infra*), si nota che tutto ciò che risulta eccessivo per le capacità "mentali" dell'agente di calcolo (uomo o macchina) può senz'altro essere "scaricato" sulla memoria, che (come abbiamo visto) è illimitata. Una macchina di Turing in realtà ha capacità mentali ridottissime, che si esauriscono in alcune semplici operazioni canoniche, una memoria non permanente, e un insieme finito di semplici regole.

Un ultimo gruppo di domande:

10. Deve esistere un limite alla lunghezza del calcolo? Si deve richiedere che la lunghezza di un calcolo sia minore di un valore facilmente calcolabile a partire dall'ingresso e dall'insieme di istruzioni? Si deve richiedere un'indicazione *a priori* sul tempo che verrà richiesto dal calcolo?

Qui si potrebbe sostenere plausibilmente che la risposta debba essere affermativa. Eppure, si è visto (in decenni di ricerche) che per poter costruire una teoria *matematica* della computabilità veramente feconda conviene dare una risposta negativa alla domanda. Tutto quello che si stabilisce è che il calcolo debba finire dopo un certo numero *finito* di passi; ma in generale tale numero non può essere stimato *a priori*. Anzi, questa risposta negativa si è rivelata come una caratteristica niente affatto contingente, ma piuttosto come uno dei tratti essenziali della teoria della computabilità.

L'idea che l'*intera* matematica potesse essere sottoposta a metodi algoritmici (comunque la si valuti) è stata, in periodi diversi, di grande importanza per lo sviluppo della matematica stessa, ed è stata una delle idee che hanno guidato la riflessione metamatematica, trovandosi talvolta anche al centro della riflessione filosofica, non solo di quella specificamente rivolta alle scienze esatte (si pensi a Leibniz). Ma soltanto in tempi relativamente recenti (verso la fine degli anni Venti e nei primi anni Trenta del Novecento) si è arrivati a una vera e propria *matematizzazione* del concetto stesso di procedura effettiva. Questo rispondeva a un'esigenza ben precisa. È vero infatti che ogni matematico ha, in un certo senso, una naturale *intuizione* su che cos'è una procedura effettiva, per cui ci si potrebbe chiedere: che bisogno c'è di una teoria *formale* della computabilità? La risposta è semplice: l'intuizione, a un certo punto, è del tutto insufficiente. Questo avviene quando vogliamo dimostrare un asserto che esprime il fatto che una classe ben definita di problemi *non* può essere governata da un algoritmo: questo è infatti un asserto su *tutti gli algoritmi immaginabili*, nella massima generalità.

Ma allora, per dimostrare un asserto di questo tipo, non possiamo limitarci alla nostra naturale intuizione; dobbiamo invece avere una *definizione esatta*, che comprenda *tutti* gli algoritmi in senso intuitivo. Per soddisfare l'esigenza che abbiamo posto, tale definizione può essere anche "troppo ampia", nel senso che essa può anche includere qualcosa che *non* considereremmo intuitivamente un algoritmo, e nondimeno svolgerà altrettanto bene la sua funzione, in quanto se dimostriamo che una certa classe di problemi non può essere risolta da un algoritmo nel senso della definizione *esatta*, sapremo, *a fortiori*, che nessun algoritmo in senso *intuitivo* potrà risolverla. In altre parole, per poter dare *dimostrazioni di indecidibilità*, e in generale per poter dare *dimostrazioni di impossibilità nell'ambito del costruttivo*, non basta afferrare, chiaramente quanto si voglia, il concetto di algoritmo; dobbiamo invece prendere come base delle nostre considerazioni una definizione esatta di procedura effettiva.

A questo scopo, il concetto di algoritmo è stato (in un certo senso) *sostituito* dai vari concetti matematici di computabilità, concetti esatti, tra i quali è preminente (per la sua vicinanza all'intuizione) il concetto di *macchina di Turing*. La caratterizzazione formale del concetto di algoritmo attraverso la nozione di macchina di Turing corrisponde in pieno alle condizioni sulla nozione informale di algoritmo sopra formulate. In realtà, è proprio a partire dal concetto intuitivo di computabilità che possiamo, analizzando il comportamento di una persona che calcola, arrivare alla definizione esatta di *Turing-computabilità*. Non solo la connessione diretta con l'intuizione, che si ottiene con questo metodo, è di grande utilità nella comprensione dei concetti precisi che si ottengono; quel che più importa, la Turing-computabilità è una nozione fondamentale per lo studio *matematico* della computabilità.

4.4
Macchine di Turing

Vediamo allora brevemente il concetto di *computabilità secondo Turing*, o *Turing-computabilità*. Tra le nozioni matematiche di computabilità questo concetto ha un posto centrale da un punto di vista concettuale, in quanto esso nasce da *un'analisi dell'azione umana di computo*, in modo da elaborare una simulazione di tale azione mediante opportune macchine, dette appunto macchine di Turing.

Per introdurre le macchine di Turing conviene iniziare ripercorrendo i punti salienti della discussione, da parte dello stesso Turing (1936), dell'adeguatezza intuitiva della *Turing-computabilità*, in qualche misura "sistematizzandola", anche sulla base della ricostruzione molto fedele che Wang (1974; 1981) ha dato della discussione stessa. Quello che ne risulterà è, in un certo modo, un approfondimento di quanto abbiamo visto sopra discutendo le condizioni che valgono per la nozione informale generale di algoritmo, per cui alcuni punti di partenza saranno assunti senza ulteriore discussione. Ma c'è una differenza: ora il nostro compito è più specifico, in quanto ci proponiamo di arrivare alla definizione di un ben preciso tipo di macchine che realizzino completamente quello che prima avevamo richiesto a qualsiasi nozione accettabile di algoritmo. Cercheremo di mostrare qual è la natura delle astrazioni operate da Turing, e vedremo come queste astrazioni audaci conducano a una nozione di computabilità *stabile* e *flessibile*. Non si deve dimenticare che il processo di astrazione, quando è corretto, non è un impoverimento delle nozioni coinvolte, quanto piuttosto un arricchimento, necessario affinché siano matematicamente trattabili.

Analizzando l'azione umana del computo si arriva a un certo numero di operazioni semplici aventi due caratteristiche:

1. sono meccaniche;
2. possono essere combinate in modo tale da svolgere operazioni meccaniche arbitrariamente complesse.

Immaginiamo una persona che calcola, ad esempio esegue una moltiplicazione, lavorando su un foglio di carta, che supponiamo diviso in piccoli quadrati, come i quaderni a quadretti della scuola elementare. Gli elementi essenziali in questa attività di calcolo sono i seguenti:

1. un mezzo di immagazzinamento delle informazioni (il foglio);
2. un linguaggio;
3. regioni del foglio osservate (*scanned*);
4. stati della mente (sostanzialmente: *decisioni* di quale passo eseguire);
5. esecuzioni dei passi della computazione, che possono appartenere a uno dei tipi seguenti: *a*) scrivi/cancella; *b*) cambio della regione osservata; *c*) cambio dello stato della mente.

Ma che cosa rende propriamente meccanico questo modo di procedere? Il procedimento descritto può considerarsi meccanico per i due princìpi di *determinatezza* e di *finitezza*.

1. *Principio di determinatezza*: le uniche informazioni rilevanti per decidere il passo successivo nel computo sono i simboli nella regione osservata e lo stato presente della mente.

Ma che cos'è, in questo contesto, *uno stato della mente*? Si vede facilmente che qui, dove quello che interessa è soltanto il procedere di un'operazione meccanica di computo, si può fare astrazione da tutto quello che di solito si attribuirebbe a uno stato della mente, tranne che da un elemento decisivo. Questo elemento è semplicemente la *risposta* ai simboli osservati, risposta che viene data alla luce delle istruzioni dell'algoritmo e del processo di calcolo svolto fino a quel momento. Quindi: lo stato della mente, qui, è un *esatto atteggiamento condizionale* (Wang, 1981) che consiste nell'essere pronti a eseguire certe azioni, sulla base soltanto dei simboli osservati. Lo stato mentale, pertanto, è essenzialmente un modo per tenere traccia dello stadio presente nell'ambito dell'intero computo.

2. *Principio di finitezza*: la mente può immagazzinare e percepire solo un numero finito di entità (item) diverse in ogni momento (c'è inoltre un confine superiore finito su tale numero; tale confine superiore è piuttosto piccolo sulle percezioni, mentre può essere molto grande sulla memoria).

È proprio all'inizio del suo fondamentale lavoro del 1936 che Turing, volendo dare una primissima approssimazione del suo concetto di computabilità, affermava che i *numeri computabili* possono essere descritti in breve come quei numeri reali le cui espressioni decimali possono essere calcolate con mezzi *finiti*.

Vale la pena di rilevare le seguenti conseguenze del principio di finitezza.

a) In ogni momento saranno osservati solo un numero finito di quadretti sul foglio.

b) Anche il numero degli stati della mente deve essere finito, in quanto gli stati devono essere immagazzinati nella mente per potervi accedere. Un altro argomento per sostenere che tale numero deve essere finito potrebbe essere il seguente: il cervello è un oggetto spazialmente finito, dunque per immagazzinare infiniti stati dovremmo averne alcuni tali che i fenomeni fisici che li rappresentano sono arbitrariamente vicini e simili come struttura; dovremmo avere quindi una infinita capacità di risoluzione e reciprocamente di accumulo di informazione nel finito. Questo, tra le altre cose, sembra andare direttamente contro alcuni princìpi (tra i più consolidati e meno controversi) della fisica quantistica.

c) Il numero di simboli che possono essere stampati è finito. I simboli semplici, primitivi, devono essere osservabili con un colpo d'occhio; se fossero infiniti, essendo qualsiasi simbolo un oggetto spazialmente finito, ne avremmo alcuni che differiscono arbitrariamente poco tra loro, e sarebbero quindi indistinguibili. Sarebbero richiesti stati della mente infinitamente complessi, contro cui valgono le considerazioni al punto *b*).

d) Gli stati possono cambiare anche se non cambia la regione osservata e non vengono modificati i simboli: infatti, combinazioni diverse stato/simbolo danno azioni diverse. Gli stati sono in numero finito, diciamo n; quindi i cambiamenti possibili saranno $n(n-1)$. C'è un numero finito di distinte regioni osservabili (intendendo che nella regione sono compresi i simboli). Possiamo stabilire, senza alcuna perdita di generalità, che venga osservato o cambiato *un solo* simbolo per volta. Inoltre, la distanza tra due regioni osservate successivamente non può eccedere un numero finito di unità. Anche in questo caso, riduciamo tale numero a *un'unità*, senza perdita di generalità. Riduciamo infine, nello stesso modo, il numero delle dimensioni del mezzo di immagazzinamento dell'informazione (il foglio) da due a *una sola*.

A questo punto, è facile costruire un modello interamente meccanico della computazione, una macchina calcolatrice ideale. Ogni stato della mente corrisponde a uno stato della macchina; la macchina osserva un numero finito di quadri (anche uno solo) in ogni momento, in ogni operazione cambia configurazione, o cambia un simbolo su un quadro, o passa a osservare un'altra regione a distanza finita (anche di un'unità) da quella che stava osservando. Restano non determinati il numero dei simboli dell'alfabeto e il numero degli stati; accrescendo il primo, si può diminuire il secondo, e viceversa.

Il dispositivo che così abbiamo descritto è proprio una macchina di Turing. La *Tesi di Turing* è l'asserzione che le *funzioni computabili sono esattamente quelle Turing-computabili*: è la proposta di identificare il concetto di computabilità, che è nostro scopo determinare matematicamente, con la calcolabilità mediante macchine di Turing. Ovvero, è la tesi che *le procedure effettive coincidono con quelle realizzabili dalle macchine di Turing*.

Riassumiamo ora la nostra discussione. Immaginiamo un dispositivo astratto che abbia le seguenti caratteristiche: può stampare e cancellare simboli sulla carta; per semplicità supponiamo che lo faccia su un nastro lineare, potenzialmente infinito in entrambi i versi, e che stampi (o cancelli) un simbolo per volta, in modo che il nastro si possa considerare suddiviso in celle, ciascuna delle quali può contenere al massimo un simbolo. Supponiamo inoltre che i simboli costituiscano un alfabeto finito, che la macchina possa muoversi relativamente al nastro, in modo da operare con una opportuna “testina” via via su celle diverse, che essa abbia un dispositivo di memoria, e che gli stati possibili in cui può trovarsi siano in numero *finito*. È fondamentale, naturalmente, richiedere che il lavoro della macchina sia interamente di *routine*, *automatico*. Non è facile stabilire che cosa significhi quest’ultima condizione, ma almeno alcuni esempi di che cosa essa *escluda* si possono dare. Non considereremmo automatico un procedimento in cui a un certo punto si richieda in qualche modo l’uso dell’ingegno (in senso creativo); e neppure un procedimento che richieda di ricorrere a eventi casuali (come i dadi), o di consultare, ad esempio, un indovino. Il procedimento deve essere invece determinato interamente via via dai passi precedenti, sulla base di istruzioni, che stabiliscono che cosa la macchina debba fare di fronte alle informazioni che ha, informazioni che sono in parte interne (lo stato in cui si trova) e in parte esterne (l’*input*). È chiaro che sono sufficienti istruzioni in numero finito: infatti esistono solo un numero finito di stati e di simboli, e un numero finito di operazioni possibili. Infine, notiamo che nel definire il concetto di *Turing-computabilità* possiamo e dobbiamo trascurare ogni questione di modellizzazione fisica, e limitarci a considerare il *software*.

4.5
Un’osservazione finale: sulla prevedibilità del comportamento delle macchine di Turing

Un classico, ben noto risultato sulle macchine di Turing, è *l’insolubilità effettiva del problema della terminazione* (o *problema della fermata*): nessuna macchina di Turing può decidere se la computazione di una macchina universale convergerà (*terminerà*) o no per certi argomenti (per un’enunciazione precisa e una dimostrazione cfr., ad esempio, Odifreddi, 1989). Ora, se un meccanismo è definito come un dispositivo il cui comportamento locale è prevedibile, nel senso che ogni sua azione è controllata da una regola meccanica (che permette la previsione), allora da tale risultato segue immediatamente che *il comportamento di un meccanismo può non essere prevedibile globalmente*, per cui non è possibile un’analisi puramente meccanica dei meccanismi (sul concetto di “meccanismo” cfr. Gandy, 1980). In altre parole, in generale, la prevedibilità locale non implica la prevedibilità globale.

In questo senso, abbiamo un esempio molto semplice (nell’ambito del discreto e del finito) di un fenomeno che può considerarsi del tutto deterministico, e inoltre senza alcuna dipendenza sensibile alle condizioni iniziali (almeno, se è intesa nel senso ordinario dei sistemi dinamici caotici: in tal senso essa viene esclusa esplicitamente da Turing); un fenomeno caratterizzato tuttavia (sotto certi aspetti) da *mancanza di prevedibilità*, e non per limitazioni epistemiche, ma *in linea di principio*.

Con l'intento di difendere una prospettiva meccanicista (in particolare sulla mente), Webb (1980) argomenta similmente che il comportamento delle macchine non è (in generale) prevedibile in modo effettivo, proprio sulla base dei risultati limitativi della teoria della computabilità (e di altri analoghi risultati metamatematici). Nessun sistema formale (purché presentato in modo effettivo, e purché si accetti la tesi di Church), per quanto potente, potrà permettere di prevedere completamente (in generale) il comportamento di una macchina di Turing universale. Si tratta di una forma di meccanicismo da cui vengono eliminati, secondo Webb, proprio gli aspetti deterministici (poiché questi sono da lui identificati con la predicibilità), e che è caratterizzato invece da un tipo particolare di *finitismo*. Lo stesso Webb si riferisce (approvandolo) a quel "meccanicismo indeterministico" che David Bohm (rifiutandolo) fa risalire a Richard von Mises, e che sembra caratterizzare molte interpretazioni ortodosse (che escludono le variabili nascoste) della meccanica quantistica. Il senso di "determinismo", qui, è legato alla predicibilità, per cui, venendo meno quest'ultima, Webb lascia ragionevolmente cadere il primo, al fine di salvare il meccanicismo con il suo nucleo finitista.

Ma non è detto che questo legame tra determinismo e predicibilità debba essere inscindibile, anzi, sappiamo bene che nella fisica (classica) è stato scisso da molto tempo (certo, in un contesto, quello dei sistemi dinamici, che è almeno a prima vista lontano da quello della computabilità). Quando comunemente si parla di "determinismo" a proposito delle computazioni mediante macchine di Turing, o quando Turing stesso osserva che il "demone di Laplace" funziona molto meglio con le sue macchine che con l'Universo (ma solo nel senso della determinatezza e della possibilità di conoscere, data una macchina e il suo stato presente, il suo stato dopo un numero qualunque di passi, non nel senso di una previsione effettiva, generale e totale del comportamento delle macchine; cfr. Turing, 1992), si sta toccando un punto importante, che sembra andare nella direzione di una separazione anche tra *determinismo* e (una certa nozione di) *prevedibilità*, oltre che tra *meccanicismo* e *prevedibilità* (come vuole Webb). Ma la questione è intricata, rischia di scivolare in una disputa terminologica, e comunque non possiamo affrontarla qui.

Ci limitiamo a ricordare, infine, che nei termini della *complessità di Kolmogorov* (cfr., ad esempio, Odifreddi, 1989), che misura in un senso preciso (che qui non possiamo esplicitare) la quantità di informazione contenuta in un oggetto (ad esempio, in un numero naturale che codifica qualcos'altro), un oggetto è *casuale* (*random*) se esso coincide (approssimativamente) con la sua descrizione più breve possibile. Non bisogna dimenticare che la *casualità* (*randomness*), in questo senso, può dipendere dal caos, ma anche all'opposto da un'elevatissima *complessità strutturale* ("organizzazione"), per cui un meccanismo sufficientemente complicato è, in questo contesto, un oggetto casuale. L'insolubilità del problema della terminazione potrebbe essere interpretata come un sintomo del fatto che una macchina di Turing universale è un oggetto, in questo senso, *casuale*.

5

Come il futuro dipende dal passato e dagli eventi rari nei sistemi viventi*

di *Giuseppe Longo*

5.1 Introduzione

5.1.1. TESI PRINCIPALI

La biologia si pone tra la montagna concettuale e tecnica della costruzione fisico-matematica e le profondità delle scienze umane. In forza dei suoi metodi sperimentali e della natura stessa dell'osservazione, è una scienza della natura; allo stesso tempo l'importanza della storia per la comprensione del vivente apre una via d'accesso privilegiata verso i metodi d'analisi propri delle scienze storiche, iniziando dalla centralità della conoscenza (e della misura) degli eventi passati.

Per investigare il ruolo della storia nella costituzione di una conoscenza specifica, quella delle scienze del vivente, questo testo evidenzierà le seguenti proprietà.

– *Le dinamiche temporali comportano cambiamenti riguardo lo spazio dei possibili (o "spazio delle fasi" in senso fisico*[1]*).*

– *La variabilità e la diversità degli osservabili sono componenti integrali della stabilità strutturale degli oggetti pertinenti e delle loro dinamiche.*

Per questa analisi, gli osservabili pertinenti sono i fenotipi, in quanto osservabili caratteristici degli organismi.

Come conseguenza di questo approccio alla storicità, si sostiene che in biologia:

– *gli eventi rari contribuiscono in modo cruciale alla storia*.

* Questo capitolo è stato tradotto da Angelo Marinucci e Stefano Salvia. L'originale è Longo (2016) [*N.d.T.*].

1. Si tratta dello spazio di tutti i parametri e gli osservabili pertinenti, come le quantità misurabili (cfr. *infra* per un approfondimento di questo concetto che, in fisica, fornisce un quadro preciso e matematico per lo "spazio di tutte le dinamiche possibili").

In questa prospettiva, si distinguerà tra:

– *il tempo dei processi* e *il tempo della storia*

in quanto casi differenti di tempi misurabili, sebbene in una stessa dimensione fisica[2]. In breve, il tempo storico è scandito dagli eventi rari e dai cambiamenti dello spazio delle fasi.

In quest'analisi si discuterà la dipendenza, nei sistemi biologici, dei fenomeni presenti (e futuri) in riferimento agli eventi passati. La dipendenza storica sarà considerata anche a partire dal problema della misura, via d'accesso scientifica ai fenomeni, includendo quelli passati. Le caratteristiche della misura emergono dalle ipotesi teoriche, come la scelta degli osservabili e dei parametri, degli strumenti e delle metriche, e, nello specifico della biologia, esse emergono anche dalla storicità delle dinamiche. In termini filosofici, quest'analisi può essere considerata "epistemica", in riferimento alla conoscenza storica ancorata alla misura e, in particolare, in riferimento alla distinzione tra:

– *le misure sincroniche e le misure diacroniche* (in quanto via d'accesso verso il passato).

Infine, la nozione fisico-matematica di invarianza, così come le trasformazioni che la caratterizzano[3], saranno impiegate in biologia in un senso nuovo, quello di

– *invarianza storicizzata* (che sarà definita più avanti, cfr. PAR. 5.3[4]).

5.1.2. DETERMINAZIONE E DIPENDENZA DALLA TRAIETTORIA, DALLA FISICA ALLA BIOLOGIA

La storia non ha alcuna rilevanza nella maggior parte delle teorie fisiche esistenti. Ciononostante, nella seconda sezione, sarà discusso brevemente il ruolo chiave delle analisi storiche in cosmologia a partire dalla dipendenza dalla traiettoria nella varietà riemanniana (attraverso il trasporto parallelo di Levi-Civita), così come nelle cascate di singolarità e di transizioni critiche. Si farà riferimento, in maniera informale, anche al modo in cui la

2. In fisica, l'energia cinetica e l'energia potenziale, per esempio, sono osservabili diversi in una stessa dimensione, l'energia.

3. Un "invariante" è caratterizzato dalle trasformazioni che lo preservano, in particolare dalle trasformazioni nello spazio e nel tempo, in quanto sistemi di riferimento, per esempio nella relatività di Galilei ed Einstein o, in termini matematici, da gruppi di trasformazioni o di isomorfismi in opportune categorie.

4. Pierre Musso ha suggerito l'aggettivo "storicizzato" per esprimere l'interesse per il trasferimento concettuale della nozione d'invarianza da un quadro fisico-matematico per la scienza storica.

fisica statistica e la fisica della materia condensata descrivono i fenomeni di dipendenza dalla traiettoria.

I casi molto interessanti di "dipendenza della storia", o più precisamente di *dipendenza dai processi*, che sono stati appena richiamati riguardo la fisica e che saranno discussi più avanti, possono contribuire a comprendere il passaggio dalle *teorie dell'inerte* alle *teorie dello stato vivente della materia*. In Longo e Montévil (2014) si è insistito sulle possibilità di questa transizione concettuale complessa trovando appoggio, per esempio, su un'estensione della nozione di transizione critica di fase. Le teorie fisiche della criticità (analisi dei passaggi per un "punto critico") sono ampiamente usate in biologia teorica a partire dagli anni Ottanta del secolo passato, come mostrato in Bailly e Longo (2006), Longo e Montévil (2014), passando all'analisi di ciò che si è chiamato "criticità estesa", una nozione propriamente biologica (permanenza in un "intervallo di criticità"). Altri autori considerano la fisica statistica e la fisica della materia condensata come il luogo d'incontro teorico possibile tra la fisica e la biologia (Goldenfeld, Woese, 2011). Ciononostante, le teorie biologiche possono avere bisogno di differenziarsi dalle teorie fisiche così come la relatività e la fluidodinamica differiscono dalla meccanica quantistica (senza dimenticare che queste tre teorie presentano incompatibilità di natura fisico-matematica). Ciò non impedisce che alcune teorie dell'inerte possano essere illuminanti per la biologia, in particolare, attraverso delle estensioni formali appropriate, come la criticità estesa o una teoria bidimensionale del tempo biologico, in cui il tempo ha la funzione di operatore, molto diversa da quella che ha in fisica (Bailly, Longo, 2006, 2009; Longo, Montévil, 2014). Tali estensioni possono contribuire a una migliore comprensione del vivente e delle sue dinamiche perché, sperando di essere più fortunati dei fisici, potrebbero non esserci incompatibilità matematiche con le teorie fisiche esistenti e pertinenti.

In opposizione al ruolo che qui si attribuisce alla storia in biologia (o nelle scienze umane), lo stato attuale di un sistema soddisfa, per principio, la comprensione della dinamica presente o, per essere più precisi, soddisfa la "determinazione" del sistema fisico, che sia per un fine predittivo – eventualmente in termini di probabilità. La "determinazione completa" di un sistema fisico, salvo le eccezioni che saranno discusse nella seconda sezione, è in linea di principio indipendente dalla maniera in cui "la si è ottenuta", se la sua traiettoria si sviluppa in uno spazio delle fasi appropriato. Inoltre, le dinamiche fisiche sono analizzate come "sistemi determinati dallo stato", se lo spazio delle fasi è ben costruito. In breve, anche nei domini della fisica, in cui le nozioni di “dipendenza dal cammino” o “di storia” sono impiegati e dove la risposta del sistema a un contesto cangiante dipende precisamente dalla storia, lo sforzo principale del teorico è proporre degli osservabili e dei parametri pertinenti, e perfino uno spazio delle fasi appropriato per ottenere una determinazione completa dello stato e attraverso lo stato. In questo modo, in linea di principio, l’insieme delle risposte possibili può essere integrato nella descrizione del sistema e, se è aleatorio, può essere dato in termini di probabilità (cfr. PAR. 5.2). In questi casi si mostrerà che è l’analisi del tempo dei processi e non del tempo storico propriamente detto, a essere sviluppata.

Il fine, pertanto, è quello di proporre un criterio di analisi sufficientemente solido per evidenziare la peculiarità di una scienza storica come la biologia e, in particolare, dell’evoluzione biologica, come detto nel paragrafo 1.1. Saranno forniti anche degli strumenti concettuali utili all’analisi del ruolo degli eventi passati nelle dinamiche presenti e future dei sistemi viventi, al fine di comprendere come la storia contribuisce alla loro forma specifica e alla loro intrinseca imprevedibilità. Si sostiene, ad esempio, che la comprensione delle funzioni passate delle strutture biologiche sia essenziale alla comprensione delle funzioni presenti (e future), poiché essa è basata sulla loro costruzione storica. Di conseguenza, si discuterà del ruolo della storia nell’evoluzione darwiniana e, brevemente, nella cognizione umana; si insisterà, inoltre, sulla specificità della teorizzazione di tali analisi, che oltrepassa, ma non è *a priori* incompatibile, con i ricchi quadri teorici della fisica.

Il lettore deve ricordare che in fisica “determinismo”, in quanto determinazione matematica, e le prevedibilità non sono la stessa cosa. È noto che, dopo Poincaré, anche un semplice sistema di equazioni o di funzioni dell’evoluzione di una dinamica non-lineare, in quanto determinazione formale adeguata di un processo fisico (per esempio, la dinamica del Sole e di due pianeti attraverso le equazioni di Newton e le loro varianti contemporanee), non implica una prevedibilità matematica (Devaney, 1989). La meccanica quantistica è andata ben oltre, analizzando la dinamica di un quanto come determinazione di un’ampiezza (una legge) di probabilità (l’equazione di Schrödinger). Si tratta, in questo secondo caso, di una maniera originale (e geniale) d’integrare l’imprevedibilità, in quanto aleatorio, nella teoria, attraverso l’uso di uno spazio delle fasi molto astratto che può anche avere infinite dimensioni (uno spazio di Hilbert). Questo approccio, così come l’indeterminazione e la non-commutatività della misura (in altri termini, il fatto che la differenza tra le misure della posizione e dell'impulso e viceversa non può scendere sotto la costante di Planck) danno la natura intrinseca (alla teoria) dell'imprevedibilità e dell'aleatorio della meccanica quantistica[5].

Ciononostante, in tutti questi differenti sistemi, uno spazio delle fasi precostituito permette di definire equazioni e funzioni dell'evoluzione dinamica sulla base della conoscenza (relativa) del presente – e i casi complessi sopra menzionati, proprio come in fisica statistica, non modificano il ruolo essenziale della determinazione dello stato in fisica.

Al contrario, per scrivere le equazioni è necessario stabilire lo spazio delle fasi pertinente, i parametri e gli osservabili, così come le scale o i livelli della descrizione. È bene sottolineare, infine, che le equazioni di flusso per i sistemi possibilmente stazionari, ma non in equilibrio, sono date anche in spazi di fasi predefiniti (Bertini *et al.*, 2015; Nicolis, Prigogine, 1977; Vulpiani *et al.*, 2014).

5.1.3. PROCESSI NOMOLOGICI

Nella scienza occidentale la nozione di "legge della natura" ha una storia lunga e controversa (Needham, 1951; Roux, 2009). L'approccio di tale testo a questo dibattito si caratterizza per il fatto che, dopo Cartesio, e più

5. Per quanto riguarda l'imprevedibilità e l'aleatorietà, è bene insistere sul fatto che "aleatorio" significa qui *imprevedibilità relativa alla teoria proposta* (Calude, Longo, 2016). Questa definizione inquadra l'aleatorio nelle simmetrie (e nelle loro rotture) proprie di ciascuna proposizione teorica (Longo *et al.*, 2015). Si può parlare di imprevedibilità/impredicibilità, dunque di aleatorio per "(non-)predire" bisogna innanzitutto provare a "dire" qualcosa (*dicere* in latino), anzi proporre una teoria. Di qui, si comprende in che senso gli aleatori classico e quantistico differiscono, prima di tutto perché la meccanica quantistica dà un valore non classico alle probabilità degli eventi *entangled* (Aspect, Grangier, Roger, 1982; Einstein, Podolsky, Rosen, 1935), poi perché per la misura e l'equazione di Schrödinger, l'aleatorio è "integrato" (e intrinseco) alla fisica dei quanti. Inoltre, ma si tratta di un'altra questione, in fisica classica ogni evento ha una causa, sia essa una fluttuazione o una perturbazione non misurabile; ora, nell'interpretazione che qui è adottata, alcuni eventi quantistici aleatori possono essere a-causali, ad esempio, lo spin di un elettrone verso l'alto o il basso. Le teorie "a variabili nascoste" affermano che ci sono sempre cause nascoste, tuttavia, è proprio lì che si pone il problema: esse hanno bisogno di variabili non-locali per generare l'*entanglement*, un'incoerenza fisico-matematica. In breve in fisica il significato di "aleatorio" è vario e dipende dalla teoria. La nozione di aleatorio che qui s'intende proporre per la biologia è diversa, e ciò è dovuto al ruolo dei cambiamenti dello spazio delle fasi e degli eventi rari (elementi comparativi più dettagliati in fisica, ma meno in biologia, sono forniti in Calude, Longo, 2016).

precisamente dopo Newton, ma certamente non prima, è possibile definire rigorosamente le "leggi della natura" attraverso la notazione matematica delle equazioni e/o delle funzioni di evoluzione in uno spazio dei parametri dato. Questa è la *condizione* stessa che permette di fare della fisica, le forme *a priori* dello spazio e del tempo devono essere pertanto date matematicamente così come ha mostrato Kant[6].

Nel XIX secolo gli osservabili furono esplicitamente aggiunti ai parametri cartesiani, in quanto condizione di una determinazione completa. Così, ciò che sarà chiamato "spazio delle fasi" fu gradualmente precisato, in particolare da Hamilton, Boltzmann, Poincaré e Gibbs, aggiungendo l'impulso alla posizione spaziale e l'energia al tempo. Verso la fine del secolo, queste coppie sono diventate le "variabili congiunte" cruciali della misura non-commutativa in meccanica quantistica.

Al fine di proporre uno spazio delle fasi a partire da queste estensioni dello spazio-tempo, come sono scelti gli osservabili? L'energia e l'impulso sono invarianti fondamentali della fisica: sono caratterizzati dalle leggi di conservazione. Tali invarianti sono poi stati compresi grazie ai teoremi di Noether (cfr. PAR. 5.2), in quanto elementi rilevanti di una proprietà matematica ancora più essenziale: la simmetria. Siffatti osservabili sono in effetti descritti da invarianze rispetto al tempo o allo spazio, che sono simmetrie nelle equazioni. Nel XX secolo la geometrizzazione ulteriore della fisica, da Einstein a H. Weil sino ad A. Connes (1994), ha prodotto dei quadri geometrici per lo spazio (delle fasi) ancora più ricchi, dei nuovi *a priori* della conoscenza fisica, al fine di rendere intellegibile l'inerte.

Al contrario, in biologia, è convinzione di chi scrive che l'impossibilità di stabilire *a priori* lo spazio delle fasi delle traiettorie evolutive non permetta la formulazione delle equazioni delle leggi, come nelle teorie fisiche in cui le equazioni specificano le dinamiche in uno spazio pre-dato (Koppl *et al.*, 2015; Longo, Montévil, 2014; Longo, Montévil, Kauffman, 2012). La tesi che qui si sostiene si basa pertanto sul ruolo della storia (come precisato nel PAR. 5.1.1) innanzitutto in riferimento alla determinazione dello spazio delle fasi cangianti dei processi biologici.

6. Gli aspetti di quest'analisi relativa alla storia e alla filosofia della scienza sono al centro del progetto diretto dall'autore all'IEA di Nantes, "Lois des dieux, des hommes et de la nature" (2014-20) (http://www.iea-nantes.fr/rtefiles/File/projet-giuseppe-longo-2014.pdf).

Questo "risultato negativo", l'impossibilità di dare *a priori* lo spazio delle dinamiche possibili come in fisica, impone un'analisi del ruolo positivo (costruttivo) della storia, non soltanto per la comprensione degli stati attuali dei sistemi biologici, ma anche nella determinazione delle loro dinamiche future (più precisamente, dei loro spazi evolutivi). In fisica la determinazione matematica permette di discernere gli sviluppi futuri, facendo delle predizioni (risolvendo equazioni e calcolando le funzioni di evoluzione) e/o assegnando probabilità ai risultati futuri, tenendo conto dell'imprevedibilità tanto classica quanto quantistica. L'analisi probabilistica è possibile, almeno in linea di principio, perché le traiettorie (eventualmente imprevedibili) si sviluppano in spazi delle fasi dati – includendo la traiettoria di Schrödinger di un'ampiezza di probabilità, che ha luogo in uno spazio di Hilbert. Una misura della probabilità è, in breve, la *ratio* tra i casi attesi e l'insieme di tutti i casi possibili, nello spazio considerato (in modo più formale, si usa la misura di Lebesgue o altre teorie della misura). Ciò che è imprevedibile è una *quantità*, in seno a una dimensione data o osservabile (i casi particolari della fisica della materia statistica e condensata sono discussi sotto). Il carattere infinito dello spazio delle fasi, e anche la sua dimensionalità infinita, non rappresentano un problema: le loro simmetrie matematiche permettono di definirli/comprimerli assiomatcamente in un numero finito di termini. È la sfida ulteriore che si affronterà in biologia: i cambiamenti continui di simmetrie nelle dinamiche biologiche, come osservato (Longo, Montévil, 2014; Longo *et al.*, 2015), non permettono di applicare una tale formalizzazione *a priori* degli spazi delle fasi.

Ciò che qui si nega è la possibilità di stabilire *a priori*, in biologia, uno spazio delle fasi pertinente, vale a dire, degli osservabili e parametri, dei "possibili", predefiniti (si propone, anzi, di comprendere quest'analisi nei contesti storici dell'uomo). Tale scelta è giustificata, in particolare, attraverso il ruolo essenziale della storia per la conoscenza del presente e delle dinamiche d'insieme, nel senso pieno della determinazione del suddetto spazio delle fasi, come in fisica. Tale spazio degli osservabili e dei parametri pertinenti (fenotipi ed ecosistema) è soggetto a continui cambiamenti che dipendono anche dai contesti passati – è la tesi che si vuole sostenere. Nello studio dell'aleatorio come imprevedibilità si passa dunque dall'impossibilità di prevedere una quantità in uno spazio dei possibili prestabilito, come nelle teorie fische esistenti (ivi compresa, con alcune riserve, la fisica statistica, come si vedrà), all'impossibilità di prevedere lo spazio delle fasi futuro propriamente detto – si tratta di un cambiamento qualitativo della conoscenza[7].

Tutto ciò è stato già analizzato in riferimento alla nozione di *enablement* (rendere possibile) (Longo, Montévil, 2014; Longo, Montévil, Kauffman, 2012) e obbliga a focalizzare l'attenzione su altri *a priori* princìpi di organizzazione e variazione come pure sullo stato di default proprio di tutti gli organismi, "riproduzione con variazione", il primo e fondamentale principio di Darwin (Longo *et al.*, 2015; Soto, Longo, 2016a).

In questo testo si insiste sul ruolo delle traiettorie filogenetiche passate e sugli eventi rari nell'innovazione biologica. Conseguentemente e in opposizione con la matematica applicata alla fisica, l'aleatorio, in quanto imprevedibilità, in biologia, al livello dei fenotipi, non può essere associato a una misura di probabilità, perché le possibilità, anzi la lista degli osservabili e dei parametri possibili, cambiano nel corso del tempo storico. Gli organismi "sopportano" i cambiamenti di quadro, i cambiamenti, nello specifico, dell'ecosistema, grazie alla loro autonomia in senso vareliano (Moreno, Mossio, 2015b; Varela, 1979). "Autonomia" non vuol dire indipendenza dal contesto: l'invarianza storicizzata della ricostruzione permenente dei componenti biologici si preserva essa stessa nel corso dei cambiamenti, ai quali si adatta attraverso l'ontogenesi e la filogenesi. Si aggiunga che la nuova comprensione dell'autonomia

7. Il cambiamento degli spazi delle fasi durante l'evoluzione biologica è stato implicitamente presentato, in diversi contesti e linguaggi, da Kauffman (2002) e Bailly e Longo (2006). Ora, le osservazioni presenti in questi testi sono state anticipate dalle intuizioni di R. Thom (Amsterdamski, 1990). Secondo Thom, nelle analisi scientifiche lo spazio delle fasi matematico preesiste all'aleatorio ("il rumore") che interessa un sistema (ivi, p. 70). In questo modo, «è l'assenza di definizione [del possibile virtuale] che influisce – fortemente – la natura scientifica della teoria dell'evoluzione di Darwin» (ivi, p. 271). Al contrario, seguendo Darwin, qui si opera alla costruzione di una scienza in cui i cambiamenti hanno luogo al livello stesso dello spazio delle fasi, del possibile virtuale, per riprendere le parole di Thom; spazio delle fasi che può essere modificato dagli eventi aleatori. L'osservazione di Thom ricorda un'idea, espressa in (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935), per cui «La meccanica quantistica è incoerente o incompleta, perché implica l'*entanglement* delle particelle» (proprietà derivata formalmente in meccanica quantistica), poiché contraddice la separabilità di eventi distinti e misurabili – un'assurdità dal punto di vista di Einstein –, allo stesso modo per Thom la teoria di Darwin non è scientifica. Molto più tardi, l'*entanglement* è stato confermato dall'esperienza (Aspect, Grangier, Roger, 1982). I grandi spiriti scorgono il punto cruciale, anche quando si sbagliano: l'evoluzione di Darwin non permette di predefinire un "possibile virtuale", ma non per questo non è una scienza; la meccanica quantistica permette di derivare l'*entanglement*, contraddicendo così la teoria della relatività, ma quest'ultimo è stato corroborato dall'esperienza e, pertanto, non è un'assurdità formale.

come *closure of constraints*, all'interno di una spazio-temporalità locale e dei suoi tempi caratteristici, come proposta in (Montévil, Mossio, 2015), può far nascere un legame tra le teorie dell'autonomia biologica e la riflessione sulla dipendenza dalla storia e sulla variabilità: infatti, l'autonomia si adatta attraverso il cambiamento, rispettando le temporalità caratteristiche e la stabilità della produzione e della rigenerazione dei vincoli. Stando così le cose, per collegare la teoria di Montévil e Mossio (2015) a questa prospettiva storica, bisognerebbe condurre un'analisi ravvicinata dell'invarianza storicizzata propria alla "closure of constraints".

Infine, si insisterà sul fatto che tutte le "descrizioni istantanee", anche complete o infinite, del presente di un sistema vivente – pure quella del demone di Laplace – sono formalmente incomplete a causa delle sue "determinazioni teoriche", contrariamente alle teorie (classiche) dell'inerte: sono incomplete innanzitutto per il ruolo che si dà alla storia, e poi perché i processi biologici possono essere esaminati solo in presente esteso, in un intervallo temporale stabilito dalla nozione di criticità estesa in relazione, come si vedrà, al parametro temporale.

5.1.4. UN RISULTATO NEGATIVO?

È possibile che, come accennato, la riflessione qui proposta possa essere considerata alla stregua di un risultato negativo in biologia, eventualmente minore: non si ha la possibilità di predefinire lo spazio delle fasi dell'evoluzione perché esso dipende anche da una storia parzialmente inaccessibile; lo stesso vale per la possibilità di attribuire delle probabilità ai cammini futuri. Quasi tutti gli storici e gli specialisti dell'evoluzione hanno già informalmente integrato queste osservazioni nei loro lavori. Il fine di questo testo è di inquadrarle in un contesto scientifico e di proporre alcuni principi, utili a comprenderne la pertinenza.

Bisogna ammettere che, spesso, i risultati negativi hanno aperto delle nuove porte alle scienze: la negazione da parte di Gauss del quinto assioma di Euclide, il problema dei tre corpi di Poincaré (da lui stesso chiamato "risultato negativo"), il teorema di Gödel... Il primo ha posto le basi della geometria differenziale riemanniana (e poi della teoria della relatività), il secondo ha portato all'analisi moderna dei sistemi dinamici (e alla loro geometria), il terzo ha permesso alla logica di diventare una disciplina matematica (la calcolabilità, le teorie della prova e dei modelli sono nate dal teorema d'incompletezza e questo per buone ragioni; Longo, 2010). Si potrebbe aggiungere l'*entanglement*, derivazione einsteiniana di una proprietà fondamentale dei sistemi quantistici, proprietà "negativa", secondo lui incompatibile con i quadri classici e relativistici. Il mito di una comprensione crescente del mondo per mezzo delle tecniche e delle teorie già accettate, vedasi ad esempio la vita che dovrebbe essere compresa a partire dalle "teorie fisiche esistenti" (Perutz, 2007), incontra la storia stessa della matematica e della fisica, che sono state e sono ancora al giorno d'oggi campi di indagine estremamente creativi per ciò che è la novità radicale e anche la teorizzazione contraddittoria. L'unità del sapere è una conquista difficile, così come l'invenzione di strumenti matematici appropriati: da Newton a Boltzmann e da Maxwell e Eayl a Connes, i concetti fisici e la ricerca di teorie unificatrici hanno stimolato, anche durante il XX secolo, l'invenzione di nuove idee matematiche; le aspettative riguardo la biologia sono le stesse[8].

In conclusione, per la determinazione e la comprensione del presente e del futuro, sarà assegnato un ruolo fondamentale e costruttivo alla storicità e al passato. Quest'opinione, ben chiara nelle scienze umane e, in certo modo, in biologia (almeno in biologia dell'evoluzione), non è generalmente costituita a partire dalle stesse motivazioni che si propone questo testo. Questo approccio si differenzia nettamente dalle teorie fisiche esistenti, con rare eccezioni che tra poco saranno menzionate, perché possono costituire un ponte per la comprensione di quadri concettuali differenti, come ricordato nel paragrafo 5.1.2. Questa indagine si basa su un trasferimento (e un adattamento) di metodi e di nozioni chiave d'invarianza e di trasformazioni che preservano gli invarianti, situati nell'interazione tra matematica e fisica. In ciò, si tenta di "oggettivare", addirittura di proporre un approccio scientifico per le intuizioni comuni sulla storicità dei sistemi viventi, sperando che un giorno da queste proposizioni teoriche costruttive (invarianti storicizzati) appaiano nuovi concetti e strutture matematiche, come è spesso successo in fisica – allorché, è bene sottolineare, ciò non si è mai avuto, per quello che si sa, nell'analisi dei fenomeni biologici.

8. Anche secondo H. Weyl, il quadro matematico delle scienze naturali è basato sulla costruzione preliminare della matematica dello spazio dei possibili, in quanto contesto a priori di tutte le analisi. Egli discute le difficoltà che ciò potrebbe comportare a un'elaborazione matematica della biologia, poiché tale quadro preliminare dev'essere fondato su una lista prestabilita di simmetrie e di loro possibili violazioni (Weyl, 1949).

5.2
Storia e dipendenza dal cammino in fisica: qualche confronto

In cosmologia il processo di formazione delle stelle, dei pianeti e delle loro aggregazioni, vale a dire la loro storia, è analizzata scrupolosamente, perché la cosmologia è quasi unanimemente considerata una scienza "storica"; inoltre, con la teoria del Big Bang, oggi è frequente evocare l'immagine del tempo, che mostra ancora di più l'importanza della storia. Ora, la determinazione formale di un sistema cosmologico (per lo più attraverso equazioni) è data dal suo stato (Islam, 2001). Inoltre, fino ad oggi la storicità data attraverso un'origine del tempo è incompatibile con la relatività. In effetti, dopo il teorema di Noether, la conservazione dell'energia è compresa come una simmetria temporale nelle equazioni del movimento (Bailly, Longo, 2006; Kosmann-Schwarzbach, 2010; Longo, Montévil, 2014), cioè come una traslazione temporale che esclude un'origine del tempo. Si tratta di una prima pista per affrontare la difficoltà di integrare la storia nella fisica, scienza che finora ha dato risposte differenti a questo problema (ad esempio, considerare il tempo relativistico come un movimento all'indietro e asintotico verso la sua "origine")[9].

In generale, sistemi fisico-matematici "dipendenti dalla storia" molto interessanti sono stati sviluppati a partire dalla nozione originale di Hertz sui sistemi non olonomici (sistemi che dipendono dal cammino; Berry, 1990). Il caso più semplice e più paradigmatico è il trattamento matematico del trasporto parallelo nel lavoro di Levi-Civita, correlato all'uso einsteiniano della geometria di Riemann: dati i punti A e C e un vettore in A,

9. In forma generale, l'astrofisica è piuttosto una scienza che analizza processi fondamentali, più o meno invarianti, come la formazione delle stelle o dei pianeti (Longair, 2006). Ora, la quantità disequilibrata di elementi chimici è spesso spiegata per mezzo di una storia particolare dell'Universo; dicasi lo stesso per la comprensione della posizione di una palla ai piedi di una collina in riferimento alla conoscenza della sua traiettoria: una rottura originale della simmetria o l'iterazione di alcune d'esse descrive pienamente lo stato di cose (cfr. gli esempi proposti sulla "dipendenza dal cammino"). Un esempio ancora più interessante può essere dato dalle leghe. Un tipo di cottura particolare di una stessa lega può provocare la nascita di proprietà drasticamente differenti: tracce del passato (o "la memoria della forma") giocano un ruolo in certe transizioni critiche o biforcazioni nelle trasformazioni previste. Ciononostante, il processo generale e la sua temporalità sono analizzati in spazi delle fasi predefiniti. Un approccio recente e radicale alla questione della storicità in cosmologia propone un cambiamento del valore delle costanti fondamentali della fisica; esso fa riferimento, tuttavia, ai cambiamenti dei valori numerici nelle dimensioni prestabilite G, c, h (o delle costanti a-dimensionali, come α) (Uzan, 2011).

l'orientamento del vettore, spostato da A a C su una sfera (più in generale in uno spazio a curvatura diversa da 0), dipende dal percorso seguito dalle trasformazioni A e C (per esempio, seguendo il percorso più corto o passando per B), allorché, in uno spazio euclideo, è indipendente dal percorso (cfr. FIG. 5.1).

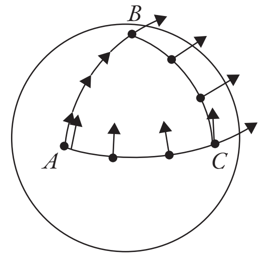
Ovviamente, quest'applicazione è altrettanto valida nelle teorie cosmologiche e relativistiche già esposte. Tuttavia, se si aggiunge il vettore *orientato* come osservabile pertinente (per esempio, come impulso), questo caso riemanniano dà un senso generale a questo tipo di dipendenza dal cammino: differenti percorsi producono diversi risultati nello spazio delle fasi (lo spazio matematico di tutti i parametri e osservabili pertinenti), anche se nello spazio essi si trovano nello stesso punto. Così, la conoscenza dello stato delle cose nello spazio delle fasi, comprendendo l'impulso, fornisce una determinazione esaustiva del sistema, indipendente dalla storia. Più precisamente, le tracce o le conseguenze del percorso seguito sono pienamente riflesse nello stato (di fase) e possono così essere ignorate in quanto tali e in favore di una determinazione soddisfacente della dinamica.

Un esempio più raffinato di dipendenza dalla storia in fisica è osservabile nelle cascate di singolarità, nella teoria delle catastrofi di Thom (Arnold, 1992), o nelle transizioni critiche di fase nella teoria della criticità (Binney *et al.*, 1992), la cui natura e ordine possono giocare un ruolo nella determinazione del risultato finale. In breve, la presenza di una singolarità o di un punto critico può "deformare" una geodetica o condurre a uno stato diverso. In generale, la conoscenza dei percorsi, osservati come qui sotto negli spazi delle fasi pertinenti, è "sintetizzata" nello stato di fase[10].

Seguendo questo ragionamento, ma secondo un approccio più pertinente per questa proposta, la fisica statistica e la fisica della materia condensata descrivono fenomeni di dipendenza dal cammino ben distinti. Per esempio, procedimenti stocastici ampiamente studiati, come i cammini aleatori rinforzati dalle fermate e i processi di salto rinforzati dal sito, in cui le particelle tendono a ritornare sui luoghi nei quali sono già passati, sono considerati come dei processi stocastici dipendenti dalla storia (Disertori, Sabot, Tarrès, 2014). Da un lato, questi rafforzamenti sono integrati nei dati, in uno spazio delle fasi noto e, dall'altro,

10. È anche il caso della termodinamica d'equilibrio, in cui gli osservabili, che dipendono dal percorso, sono l'entropia, l'entalpia, la pressione ecc.

FIGURA 5.1
Schema di trasporto parallelo di Levi-Civita



l'aleatorio dell'ambiente è dato come catena di Markov, in cui la probabilità dello stato seguente dipende unicamente dallo stato attuale e non dalla sequenza di eventi che lo hanno preceduto, e questo all'interno di una lista dei possibili prestabilita.

In altri casi complessi, la cui analisi oltrepassa la portata di questo testo, è ancora aperta la discussione sull'aggiunta di parametri e osservabili differentemente impliciti che permetterebbe un'interpretazione generalizzando ciò che si è detto a proposito del trasporto parallelo o delle cascate di transizioni critiche. La dipendenza dalla storia, che i fisici descrivono come una dipendenza dal cammino, può essere compresa come percorsi diversi che producono risultati differenti all'interno di uno spazio delle fasi convenientemente inteso, ma prestabilito? Si direbbe di sì, visto che la situazione sembra globalmente ben compresa in fisica come la dimensionalità in meccanica statistica[11].

11. Come ricordato in Longo e Montévil (2014), la meccanica quantistica o quella statistica possono avere bisogno di un numero aleatorio di variabili di particelle. La dimensione dello spazio delle fasi, *stricto sensu*, non è dunque prestabilita. Ciononostante, il campo delle possibilità è noto: le particelle hanno una natura nota, osservabili pertinenti, determinazioni equazionali e le probabilità di ciascuno spazio delle fasi delle particelle, che sono dati. In altri termini, anche se il numero delle dimensioni dello spazio non è noto, la sua natura e le sue probabilità sono note – si conosce, pertanto, la probabilità conforme alla quale cambieranno una, due o più dimensioni e, ancora più importante, esse sono formalmente simmetriche. Il numero delle particelle (eventualmente supplementari) diventa, così, un nuovo parametro. La situazione è quindi delicata, ma completamente padroneggiabile sul piano matematico.

Si deve sottolineare, infine, che le strutture non in equilibrio (eventualmente stazionarie, per esempio il flusso costante di energia-materia) non hanno una storia evolutiva: al massimo seguono evoluzioni individuali standard. Recuperando la terminologia che si sta usando, esse hanno un tempo di processo, ma non un tempo storico. Una fiamma, una cellula di Bénard o una micella, un uragano... attraversano irreversibilmente vari stati, sotto un flusso di energia o di materia, inoltre, questo processo si sviluppa in un tempo proprio irreversibile. Tuttavia, le fiamme, le cellule di Bénard o le micelle... sono sempre dello stesso tipo, hanno addirittura, in linea di principio, la stessa struttura fisico-matematica sulla Terra dopo 4 miliardi di anni e possono essere descritte in uno spazio delle fasi pre-dato. È proprio per questo che sono considerati come processi che cambiano in modo irreversibile nel tempo, quello dei processi, che, però, non hanno un tempo storico propriamente detto. Non è questo il caso degli organismi, con i loro 4 miliardi di anni di una storia evolutiva piuttosto ricca, passando per maggiori cambiamenti di osservabili e di parametri pertinenti, così come per eventi rari, che saranno analizzati nel paragrafo 5.9.

La difficoltà che si presenta in biologia – la tesi di chi scrive – è che le dimensioni, gli osservabili e i parametri pertinenti che costituiscono lo spazio delle fasi sono anche il risultato di un *percorso storico* e non possono essere predati. Questi cambiamenti fanno la storia e il suo tempo proprio, scandito dalla costituzione della diversità e degli eventi rari. A questo punto dell'analisi è arrivato il momento di proporre l'idea per la quale, in contrasto con i processi fuori dall'equilibrio già menzionati (le fiamme ecc.), i cambiamenti storici degli organismi, dopo i primi batteri, mostrano la differenza radicale del vivente in relazione a un sistema lontano dall'equilibrio: esso non si pone solo in un tempo processuale, ma anche in un tempo storico inteso allo stesso tempo come filo e ontogenesi[12]. Si inizierà pertanto l'analisi da una deviazione (apparente) sulla cognizione.

12. Come mostrato in Longo e Montévil (2014), i sistemi lontani dall'equilibrio sono delle auto-organizzazioni spontanee di flussi di energia e/o di materia. Al contrario, gli organismi non sono spontanei e usano i flussi per vincolarli. La maniera in cui la chiusura dei vincoli canalizza i flussi energetici è analizzata nei dettagli in Montévil e Mossio (2015). La precisazione che qui si aggiunge consiste nel modo in cui gli organismi, per autorganizzarsi, usano continuamente le tracce della loro storia, in particolare una traccia fisico-chimica fondamentale e un vincolo ereditato in cui si canalizza lo sviluppo: il DNA.

5.3
La memoria: un esempio d'invariante storicizzato

> Imagination…
> son nom est la déformation de la mémoire des sensations
>
> P. Valéry, *Cahiers*, 1974

Al fine di discutere del ruolo della storia nei sistemi biologici, può essere utile iniziare da un elemento specifico dell'attività (animale): la ritenzione e la memoria, che rappresentano tracce fondamentali della storia. Tanto la ritenzione incosciente che la memoria cosciente hanno un ruolo funzionale maggiore negli animali; esse sono necessarie all'azione nella misura in cui permettono la protensione, anzi la previsione cosciente. In Longo e Montévil (2014) si suggerisce una rappresentazione matematica semplice della ritenzione e della protensione, in cui la protensione dipende matematicamente dalla ritenzione[13]. Se ne deriva così un coefficiente particolare di protensione, dipendente dalla ritenzione nell'organismo dato, detta "inerzia biologica". Essa è analoga all'inerzia massica in fisica che, in quanto coefficiente di velocità, dà una quantità di movimento; l'inerzia biologica esprime il "peso" astratto (o la traccia) del passato nell'azione protensiva.

Oltre al problema interessante della dipendenza dal cammino in fisica menzionato precedentemente, esistono dei materiali inerti che hanno una sorta di memoria, come mostrato dai fenomeni di *relaxation* e di formazione di leghe; ciononostante, il ruolo nella protensione, come in biologia, è al di fuori del campo d'applicazione delle teorie fisiche esistenti. Una certa ritenzione del passato e una protensione sembrano essere presenti anche all'interno degli eucarioti unicellulari: ad esempio, un paramecio può ricordare (*retenir*) i cammini passati per cercare il suo nutrimento (Misslin, 2004); vedasi anche il "blub" analizzato (Boiseau, Vogel, Dussuntour, 2016). Molti studiosi affermano dunque che c'è vita laddove c'è *agentivité* e, quindi, cognizione, così come una certa forma di ritenzione e di protensione. Ci si concentrerà, però, sull'attività comune del corpo e del cervello negli animali multicellulari in quanto luogo per la formazione di una traccia attiva selezionata di passato, una forma debole di invariante. Come

13. Esistono dati neurofisiologici e immagini neuronali a favore della protensione (precosciente) e della dipendenza della protensione dalla ritenzione (Botzung, Denkova, Manning, 2008; Szpunar, Watson, McDermott, 2007).

indicato dagli esempi precedenti, la rintenzione e la protensione riguardano l'organismo intero in relazione al suo ambiente. Queste producono e permettono di fornire un primo esempio di ciò che si è voluto chiamare un "invariante storicizzato".

In matematica, un invariante è interamente definito o conosciuto quando la classe di trasformazioni che lo preserva è esattamente definita o conosciuta[14]. In biologia, si può fornire solo una definizione informale, quantunque ispirata alla matematica, all'invarianza; ciò che "relativamente" si preserva attraverso certe specifiche trasformazioni dello spazio delle fasi (dei possibili biologici, ecosistemici ecc). Si tratta di una definizione relazionale: l'invarianza dipende da come un concetto, una struttura, se possibile matematizzata, è data in un contesto e preservata nel caso di trasformazioni di questo contesto stesso (Marinucci, in stampa). Siccome queste trasformazioni si producono nel tempo, è possibile chiamare tali invarianti, propri della biologia, *invarianti storicizzati*.

Si tratta di trasferire, pertanto, in biologia, un concetto o, più precisamente, una metodologia per formare un concetto, anzi, per stabilizzare relativamente una struttura. Si tratta *dell'invarianza per trasformazioni*, con la variabilità storica e la flessibilità propria degli organismi (e della cognizione) e le loro teorie. L'informalità non è dovuta a una mancanza di rigore, ma alla natura differente della stabilità strutturale biologica se comparata con quella fisica, differenza sulla quale si ritornerà.

Giungendo quindi al caso della cognizione, al quale si applica prima di tutto questa proposta teorica: nella cognizione animale la ritenzione precosciente e la memoria cosciente sono forme di costruzione di invarianti per l'azione. Ciò significa che al fine di muoversi, catturare una preda, agire ecc., gli animali non hanno bisogno di ricordare esattamente o esplicitamente i processi passati trattenuti (nella mente), nemmeno tutti i dettagli dei vari contesti dai quali provengono in quanto invariante relativamente stabile, anche in una forma non purificata; si impara ad anticipare una traiettoria *dimenticando* i dettagli dell'oggetto ricercato e il contesto delle esperienze precendenti e mantenendo solo ciò che importa per l'azione. La ritenzione recupera ciò che è cruciale per l'attività in corso; essa esclude i dettagli che non sono per essa pertinenti. La ritenzione e la memoria sono selettive e *oblianti*; esse formano, così, un invariante relativamente stabile

14. Un esempio elementare: una linea retta può essere definita come un asse di rotazione, vale a dire come l'invariante di un gruppo di simmetrie, che sono trasformazioni dello spazio tridimensionale stesso, le rotazioni.

selezionando negativamente, e quindi dimenticando ciò che non è pertinente – giacché la pertinenza è relativa all'attività in corso e al suo contesto, essa mantiene ciò che importa per l'azione e ciò permette di reiterare l'azione in ambienti differenti, benché parzialmente simili. Così, l'azione protensiva usa ciò che è stato selettivamente mantenuto e che sembra pertinente per il nuovo contesto "interpretando" le tracce del passato, vale a dire dandogli un significato in un nuovo contesto[15]. La ritenzione di un'attività e di un contesto può così essere considerata come la costruzione di un *invariante storico* (biologico e cognitivo), che è relativamente preservato dalle trasformazioni di quadro.

La protensione modifica e stabilizza maggiormente l'invariante trattenuto, interpretandolo, riattivando questa traccia del passato secondo ciò che è più pertinente nel nuovo contesto di azione. Il ricordo è, infatti, un'attività trasformatrice. La fissazione di un'azione (o di un'interazione con l'ecosistema) e questa stima di ciò che è pertinente per l'azione protensiva risultano dalla struttura relazionale e dalle trasformazioni possibili di contesto, interne ed esterne all'organismo, e questo per affrontare il futuro. È ciò che si intende quando si afferma che la ritenzione e la memoria animale esiste per l'azione, cominciando per il movimento animale più semplice, che è la forma minima di protensione (Berthoz, 1997).

In breve, un invariante mantenuto è storicizzato in quanto traccia del passato, costituita in un contesto, e reinterpretazione continua di queste tracce in un senso semiotico. L'oblio selettivo vi gioca un ruolo cruciale. Dalla presente prospettiva, ciò può contribuire in modo determinante all'innovazione; far fronte all'incerto usando un'esperienza mantenuta, vagamente simile, obbliga a inventare un nuovo comportamento o una nuova risposta. Come si mostrerà a proposito dell'evoluzione biologica nel paragrafo 5.4.2, la novità è spesso il risultato di una riorganizzazione delle tracce (fenotipiche e genetiche in questo caso) del passato. Tipicamente, per portare a termine un'azione futura, si possono usare e ricombinare differenti esperienze o tracce (precoscienti) del passato; l'uso dell'una o dell'altra, o di entrambe, può dipendere da differenze minori, non-misurabili nel presente – una forma di biforcazione dovuta alle tracce della storia passata. Ritenzione e protensione sono insieme una costruzione e una ricostruzione interpretativa del passato.

15. Per quanto riguarda la difficile nozione di "interpretazione", applicata agli esseri viventi, non s'intende far riferimento a un significato cosciente "in quanto riferimento", ma di un significato *in atto*, in un *Umwelt* nel senso di von Uexküll (Brentari, 2015). In altri termini, di un significato codificato dall'azione in un senso biosemiotico largo (cfr. il riferimento a Peirce in Deacon, 2015).

Riassumendo, la rete di esperienze passate produce un invariante (trattenuto) cognitivo, in quanto risultato di un'attività stabile nei differenti contesti e in quanto traccia interpretata del passato. Questo invariante è inoltre modificato quando la ritenzione è usata per la protensione; l'uso della memoria non è mai passivo, nella misura in cui si trattiene ciò che è utile per l'attività in corso o in prospettiva di un'azione futura, talora ristrutturando radicalmente le tracce mentali esistenti. La memoria è permanentemente reinterpretata. Su questa linea, Edelman e Tononi (2000) considerano l'attività del ricordo in quanto prodotta nel cervello quando «si pone esso stesso in uno stato già vissuto» compatibile con quello presente. Tale stato del cervello è pertanto il risultato di un'attività passata in un contesto che potenzialmente non esiste più, nel quale contribuiva a costituire un senso specifico; a questo "significato" di un'azione passata si aggiunge il senso dell'azione in corso. Secondo la maniera in cui il cervello (e il corpo) erano strutturati nel passato, quest'interazione del suo stato non è più identica. Essa è il prodotto di una relazione cervello-corpo cangiante, in un nuovo contesto per un nuovo scopo: in questo senso, essa è interpretata. L'intero processo costituisce un caso tipico di costruzione e uso di ciò che si è chiamato "invariante storicizzato".

Questa dipendenza dal passato dell'azione futura può essere vista come una ricostruzione mai identica di un invariante precedentemente forzato e la produzione di un nuovo invariante; se lo spazio delle esperienze vissute cambia, allora le trasformazioni che definiscono l'invariante storicizzato sono anch'esse soggette a cambiamento. In breve, la ritenzione e la memoria, continuamente ricostruite, sono dei componenti essenziali della protensione e contribuiscono così al rinnovamento in un contesto cangiante. Lo spazio delle fasi dell'attività cambia continuamente. È certamente importante sottolineare che un cervello funziona solo nel suo ecosistema preferito, la testa di animale, il che implica l'attività del corpo intero[16]. Sorprendentemente, la ritenzione di un'attività per un'azione futura può anche aversi nel corpo ed essere poi trasferita nel cervello (rigenerato) (Schomrat, Levin, 2013)[17].

16. Prochiantz (2011) osserva che un pianista pensa anche con le sue mani e un ballerino con i suoi piedi. Le strutture neuronali e muscolari sono modificate insieme e la ritenzione è distribuita. Per un'analisi della memoria vestibolare, cfr. Berthoz (1997).

17. Le planarie recuperano parzialmente la memoria dopo la loro decapitazione e la rigenerazione delle loro teste, come se le tracce corporali delle attività passate potessero influenzare il cervello nuovo (Schomrat, Levin, 2013). Come mostra la nota precedente, è noto che i pianisti e i violinisti hanno sinapsi rafforzate, in relazione all'aumento muscolare locale (si ignora, però, se l'esperienza delle planarie possa funzionare con pianisti e violinisti per mancanza di volontari).

In altri termini, l'instabilità parziale di ciò che è stabile, la ricostruzione e l'uso di un invariante storicizzato, costituito nell'azione, è il cuore dell'adattamento biologico, in particolare dell'elemento più plastico di un animale: il cervello. La trasformazione in un nuovo contesto dell'invariante storicizzato dell'azione passata permette la creazione permanente di nuove soluzioni per affrontare questo nuovo contesto. Questa trasformazione consiste in un cambiamento appropriato del riferimento al passato, una reinterpretazione dell'invariante trattenuto. Ciò può aiutare a produrre novità anche rivisitando un contesto familiare, sulla base di un'esperienza nuova o più approfondita. Infatti, la diversità delle esperienze vissute contribuisce, anche per il fatto che sono mescolate, alla diversità delle risposte possibili a nuove sfide, così come alla stabilità o anche alla sopravvivenza dell'organismo. La ritenzione di *eventi rari* (cfr. PAR. 5.9) può contribuire anche in modo cruciale alla storia cognitiva di un individuo, poiché gli eventi rari possono incidere fortemente sulla memoria.

Giacché si discute di cognizione, si può esplicitamente affermare che la conformazione specifica del cervello e del corpo e le *deformazioni* hanno un *significato* in un contesto dato, in particolare in quello che contribuisce a formarle. In un contesto differente, queste strutture, che possono anche essere soggette a cambiamenti via transizioni (critiche ed estese), acquisiscono un nuovo significato grazie alle nuove strutture relazionali nelle quali sono incluse. Inoltre, ciò può andare dalle trasformazioni individuali (creazioni di nuove pratiche e nuovi concetti) alla creazione di nuove forme collettive di "vivere insieme" (Koppl *et al.*, 2015).

La costruzione, la trasformazione e l'utilizzo di invarianti storicizzati dell'azione in un contesto, sotto forma di ritenzione e protensione, sono al cuore delle dinamiche cognitive. È bene insistere sul fatto che il trasferimento puramente concettuale, fatto di nozioni tipicamente matematiche, dev'essere adattato al contesto biologico. Per esempio, la nozione d'invarianza della linea retta, come detto nella nota precedente, è perfettamente adeguata per descrivere, in fisica, il movimento inerziale in quanto movimento rettilineo uniforme. Si osservi che, a questo proposito, l'inerzia galileiana è una proprietà asintotica/limite, che mai si realizza nel mondo fisico. Ciononostante, contemplando a partire da questo orizzonte-limite tutti i movimenti possibili, essa li rende intellegibili, perché Galilei può così analizzare ciò che è proprio del movimento inerziale, segnatamente la gravità e l'attrito. Nella relazione tra matematica e biologia, questo tipo di passaggio, questa forma di astrazione o di costruzione limite, può non funzionare. Pertanto, le analogie concettuali si usano con prudenza; strumenti matematici adeguati a questi concetti potrebbero essere prodotti da innovazioni future, come avviene continuamente nella storia della fisica.

Si discuterà ulteriormente della memoria e della cognizione dopo aver trattato gli aspetti più propriamente biologici del ruolo della storia nelle dinamiche filogenetiche.

5.4
Gli osservabili biologici e le loro dinamiche evolutive

Tout le passé d'un organisme peut venir se refléter dans son monde.
Miquel, 2015

5.4.1. *ENABLEMENT*, *EXAPTATION* E NON-OTTIMIZZAZIONE NELL'EVOLUZIONE

Come in fisica, le teorizzazioni propriamente biologiche iniziano dalla determinazione degli osservabili (e, laddove possibile, dei parametri[18]) pertinenti. La teoria di Darwin, ad esempio, si concentra sui fenotipi; la *discendenza con modificazioni* e la *selezione* si applicano all'analisi dell'eredità di questi osservabili. La scelta degli osservabili dipende da "ciò che conta" per la teoria, sul modello delle proprietà di conservazione in fisica già menzionate, o, nel caso della termodinamica, sul modello delle proprietà particolari di un osservabile nuovo e molto originale, l'entropia, che non necessita di essere conservato. Anche quando le proprietà conservate non cambiano, l'unità dei vari quadri teorici è una sfida ulteriore, come mostra la ricerca, ormai centenaria, di una teoria unificatrice per i campi relativistici e quantistici. Allo stesso modo la teorizzazione biologica necessita di quadri teorici propri; l'unità con le teorie fisiche esistenti o nuove dev'essere costruita come già detto; ma essa non può essere una metafisica imposta dal trasferimento di strumenti tecnici da una disciplina all'altra[19].

18. Galilei ha inaugurato la fisica moderna focalizzandosi sulla quantità di moto: il movimento inerziale è la conservazione della quantità di moto.

19. Tutto ciò viene approfondito nell'*Introduzione* di Longo e Montévil (2014). Ad esempio, l'unificazione asintotica delle traiettorie classiche e delle leggi di conservazione con la termodinamica, realizzata da Boltzmann, è discussa come un contro-esempio dei metodi riduzionistici dominanti. L'approccio di Boltzmann ha portato a una nuova teoria unificata e alla sua matematica: la fisica statistica. Si rimanda a Chibbaro, Rondoni e Vulpiani (1992) anche per una storia antiriduzionistica della fisica.

La matematica e la fisica sono fondate su una definizione (formale) perfettamente stabile di invarianza, poiché i loro oggetti sono generici (sono degli invarianti della prova e dell'esperienza: un triangolo vale per tutti gli altri, così come una mela che cade). In biologia, al contrario, la stabilità strutturale degli organismi, ma anche degli organi e delle popolazioni, è dovuta alla "chiusura dei vincoli" degli organismi e alla loro autonomia (Montévil, Mossio, 2015), ma anche alla variazione, che è correlata alla sensibilità al contesto, contribuendo all'adattamento e alla diversità, ed è, inoltre, basata sulla specificità (e, quindi, sulla storicità) degli organi e degli individui. Una popolazione è più stabile (per resilienza o tolleranza adattiva alle disfunzioni) se è diversificata. Questa relazione vale anche per i piccoli numeri e si applica anche agli organi (Bravi, Longo, 2015). Tali proprietà della vita, in particolare il ruolo della diversità o la mancanza della (perfetta) invarianza degli individui, obbligano a comprendere la robustezza e la resilienza in biologia in modo diverso dalla fisica (Lesne, 2008). Nello specifico, la ridondanza computazionale o fisica contribuisce alla robustezza in questi domini, ma è molto differente dalla diversità biologica (cfr. anche la nozione di degenerescenza di Edelman). La diversità è il prodotto di un'invarianza storicizzata dal fatto che la specificità di ciascun organismo dipende dalla sua storia onto-filogenetica. A dire il vero, come sanno bene i biologi sperimentali, le osservazioni e gli esperimenti richiedono la migliore conoscenza possibile della storia dell'organismo specifico usato come modello.

Per i fini di questa analisi, si prendono in considerazione gli osservabili di Darwin e le loro dinamiche storiche. Inoltre, lo scopo è di unire ontogenesi e filogenesi, parzialmente in una prospettiva EvoDevo (Longo *et al.*, 2015; Soto, Longo, 2016b). In questo quadro, l'eredità è un oggetto di studio fondamentale. Il fine è pertanto di analizzare la maniera in cui la conoscenza della storia in quanto tale, e non solo delle sue conseguenze presenti, dev'essere presa in considerazione in tutti i tentativi di "determinare" il presente e analizzare l'evoluzione futura di un organismo. I sistemi biologici non devono quindi essere considerati come dei "sistemi determinati dai loro stati", perché la conoscenza del loro cammino storico sino allo stato presente gioca un ruolo diretto nella determinazione teorica di siffatto stato presente e delle dinamiche future.

Quale che sia la concezione di determinazione biologica, deve chiaramente comprendere le dinamiche imprevedibili, in quanto soltanto gli incompetenti affermano di poter prevedere, risolvendo equazioni, simulando numericamente, o assegnando delle probabilità, la lista dei fenotipi in un milione di anni, una scala temporale evolutiva ragionevole. Ciononostante, alcuni sostengono che si tratta solo di una questione di imprevedibilità deterministica, nel senso di una dinamica non-lineare, e dunque che l'analisi delle traiettorie evolutive in quanto geodetiche in spazi delle fasi pre-dati è possibile ipotizzando che i geni contengono la determinazione completa dei fenotipi (vedasi l'ottimizzazione genetica delle popolazioni, secondo l'approccio di Grafen, 2014, in cui la massimizzazione del valore riproduttivo dirige l'evoluzione, in accordo con la Sintesi Moderna; Huxley, 1943).

La prima critica che si può indirizzare all'approccio geno-centrico, ampiamente basato sulla dinamica classica, riposa su un riferimento all'indeterminazione quantistica che sembra presente al livello molecolare e al contempo nei fenomeni genetici ed epigenetici (Arndt, Juffmann, Vedral, 2009; Buiatti, Longo, 2013). In breve, benché l'aleatorio fisico è l'imprevedibilità, sia classica (e quindi deterministica) sia quantistica (e dunque dovuta a un'indeterminazione intrinseca), l'aleatorio biologico è almeno una commistione e una sovrapposizione di entrambi. Una mutazione, il salto di un trasposone, può dipendere da eventi quantistici. Lo stesso dicasi dei fenomeni epigenetici come la demetilazione degli istoni. L'aleatorio classico e l'aleatorio quantistico possono così sovrapporsi in una cellula e avere, in modo indipendente o combinato, conseguenze fenotipiche (Buiatti, Longo, 2013; Plankar, Jerman, Krašovec, 2011). Di qui, un evento quantistico può comportare una variazione negli osservabili biologici, i fenotipi, che è, a un livello fenomenico, molto differente da quello della microfisica con la propria forma specifica di aleatorio. In particolare, un fenotipo può dipendere causalmente da un evento a-causale, nell'interpretazione standard del formalismo quantistico, ben oltre dunque le geodetiche della fisica classica.

Inoltre, le interazioni tra differenti livelli di organizzazione possono produrre ciò che si è chiamato "bio-risonanza" (Buiatti, Longo, 2013), in analogia con la risonanza dei pianeti di Poincaré, punto di inizio dell'analisi dell'imprevedibilità deterministica. Ciò permette di prendere in considerazione l'eredità non basata sul DNA, sia essa epigenetica o ecologica (Jablonka, Lamb, 2008; Nowacki, Landweber, 2009; Rando, Verstrepen, 2007; West-Eberhard, 2003). Così, la selezione naturale si applica escludendo gli organismi incompatibili e permettendo (*enabling*) quelli fattibili all'interno di un ecosistema co-costituito (Longo, Montévil, 2014; Longo, Montévil, Kauffman, 2012).

Tutto ciò è palesemente molto diverso dalla determinazione di una geodetica in uno spazio delle fasi pre-dato; si tratterebbe, se così fosse, di un ecosistema in cui tutte le forme di vita sarebbero completamente codificate nel DNA, seguendo il mito geno-centrico della Sintesi Moderna. Per comprendere la differenza, si noti che un fiume e un dado seguono una geodetica, sicuramente deterministica, verosimilmente imprevedibile, un cammino specifico in uno spazio delle fasi pre-dato e "non si sbaglia" mai. Nell'evoluzione (ma anche nello sviluppo), le specie (e gli organismi) si sbagliano spesso lungo il percorso (il 99% delle specie è scomparso). La vita genera forme nuove esplorando cammini generici (cammini possibili, relativamente agli invarianti per trasformazioni adeguate, ma non completamente determinati – il quantistico è sufficiente a garantirlo). Tale esplorazione è resa possibile e canalizzata da vincoli interni, organici o dell'ecosistema, e fallisce spesso. Il risultato è lontano dall'ottimizzazione, non è proprio un *optimum* locale, a causa del fatto che non c'è un ordine parziale pre-dato in uno spazio delle fasi fisso in cui l'elemento più importante possa essere definito; l'ecosistema è co-costituito dalle dinamiche e nessuna scelta pre-data degli osservabili permette di fissare uno spazio parzialmente ordinato con un massimo o anche con un massimo locale. In effetti, se un organo o un organismo era un *optimum* in uno spazio delle fasi dato e se questa ottimizzazione era un elemento essenziale del suo *fitness*, come sostiene la Sintesi Moderna, sarebbe rapidamente morto al minimo cambiamento dell'ecosistema. Per usare la metafora del "bricolage" (Jacob, 1981), l'evoluzione può usare la struttura di una vecchia sedia per costruire il contenitore di una radio. Questa non è certamente ottimale, ma ci si può sedere sopra ascoltando la radio, una *exaptation* ben appropriata nei termini di Gould (per altri esempi, come le piume e gli *spandrels* di diversi tipi, cfr. Gould, 1989, 2002; Gould, Vrba, 1982[20]). Le mani dei primati sono sufficienti per afferrare i rami degli alberi, ma non ottimali (il loro pollice non è perfettamente opponibile), ciononostante, possono anche essere usate, essendo aperte, per accarezzare, battere o appiattire un oggetto. Detto altrimenti, se un organo era un oggetto ottimale per un'attività, sarà difficile o impossibile utilizzarlo per altre funzioni, sicuramente non in modo ottimale, che non sia l'uso sincronico o una *exaptation* evolutiva.

Riassumendo, l'*exaptation* delle tracce ereditate del passato, insieme all'autonomia degli organismi nel senso di Moreno e Mossio (2015b), contribuisce alla relativa stabilità della vita attraverso l'invenzione continua di "soluzioni" nuove, compatibili con i vincoli interni ed esterni, co-costruiti di "fattibilità" (*viabilité*). Bisogna sottolineare che l'*exaptation* e il *bricolage* sono compresi meglio abbandonando il mito dell'ottimizzazione nell'evo-

20. Lo *spandrel* è una struttura, in architettura, sottoprodotto di esigenze tecniche, usato anche per un'altra funzione (per esempio, i dipinti in spazi inconsueti o i pendenti di supporto tra gli archi di una cattedrale, come in San Marco a Venezia).

luzione. L'esempio metaforico di Jacob del riuso di una vecchia sedia per fare il contenitore di una radio, senz'altro non ottimale, e i suoi possibili e molteplici usi, rappresenta anche un esempio di ciò che bisognerebbe chiamare "sovraccarico" funzionale degli organi, molto comune in biologia. Le nostre mani, i nostri cervelli sono gli esempi più tipici – sono continuamente preposti a nuove funzioni. L'ottimizzazione funzionale escluderebbe per principio funzioni alternative, che dovrebbero essere tutte ottimali. Come detto, se la *fitness* è l'ottimizzazione in uno spazio delle fasi pre-dato, l'organo (o l'organismo) ottimizzato non potrebbe sopportare i cambiamenti dell'ecosistema. Inoltre, poiché la struttura delle dinamiche biologiche è relazionale, è normalmente impossibile isolare un osservabile dagli altri, togliere la correlazione delle loro funzioni, definire un ordine parziale con un massimo e attribuire un valore a una funzione biologica misurabile[21].

5.4.2. A PROPOSITO DELLA CREATIVITÀ BIOLOGICA

Dovrebbe essere chiaro che si discute delle nozioni di "creatività" e di "ingegnosità" in quanto nozioni teoriche, di forme di imprevedibilità nella teoria della storia che si sceglie, come spiegato nelle note della pagina precedente. In questo modo, non s'impone nessun assoluto metafisico al lettore; è possibile che una "teoria delle variabili nascoste" o un demone di Laplace possa un giorno interpretare queste nozioni in un quadro causale cartesiano

21. L'applicazione acritica delle geodeticche classiche alle traiettorie filogenetiche è molto criticata dai fisici che lavorano anche in biologia (Goldenfeld, Woese, 2011), dove si sottolinea «l'importanza delle interazioni collettive e l'interdipendenza di fluttuazioni ambientali ed evoluzioni, neglette dalla Sintesi Moderna», unitamente agli approcci di ottimizzazione (attraverso geodetiche) che si basano su quest'ultime. È bene citare direttamente il testo: «sappiamo che il trasferimento laterale dei geni si produce anche negli eucarioti multicellulari, come mostrato dai risultati di uno studio dell'associazione pangenomica pubblicato l'anno scorso [...]. Si tratta proprio dell'eredità dei caratteri acquisiti [...] non solo attraverso il trasferimento laterale dei geni, ma anche attraverso i meccanismi epigenetici che eludono i meccanismi ereditari usuali, in particolare nei cigliati. Non solo la Sintesi Moderna riceve forti critiche, ma sono i suoi stessi fondamenti a essere messi in questione. La tautologia evidente in "la sopravvivenza del più adatto" serve a sottolineare il carattere retrogrado del paesaggio adattivo; non solo è non-misurabile a priori, ma non apporta nessun mezzo per esprimere l'aumento senza-fine della complessità e della produzione di novità genetiche. Così, la Sintesi Moderna è, quanto meno, una rappresentazione parziale della genetica delle popolazioni; ma questo è in sé un sott'insieme limitato dei processi evolutivi e senza dubbio il meno interessante» (Goldenfeld, Woese, 2011, p. 383). La "non-misurabilità *a priori*" è, per il discorso che si sta svolgendo, causata dalla co-costituzione delle traiettorie filogenetiche e dei loro spazi delle fasi; l'aumento della complessità aleatoria e indefinita degli organismi è formalizzata in Bailly e Longo (2009), Longo e Montévil (2014).

pre-dato, ma questo non è qui un problema. Si interpretano infatti termini come "creatività", spesso utilizzati nell'analisi del vivente, ma inadeguati alle teorie fisiche esistenti, come l'apparizione di un nuovo osservabile (dei nuovi fenotipi, anzi organismi) fondato sulla re-interpretazione contestuale delle storie passate. Le tracce del passato contribuiscono alla costruzione di nuovi osservabili, e così a dei nuovi spazi di interazioni ecosistemiche. Come riassunto in West-Eberhard (2005), «l'origine delle differenze specifiche, e dei nuovi fenotipi in generale, implica una riorganizzazione dei fenotipi ancestrali (ricombinazione dello sviluppo), seguita da una ricezione (*accommodation*) genetica del cambiamento». Per esempio, la forma della foglia di *Monstera dubia* «è stata evolutivamente duplicata, soppressa e ricombinata in una molteplicità di modi durante l'evoluzione del genere *Monstera*, dando nascita a una varietà di ontogeneìe proprie a ciascuna specie». Un altro tipo di ricombinazione evolutiva è «il transfert intersessuale o transfert dell'espressione da un tratto di un sesso all'altro» (West-Eberhard, 2005). Anche l'eterocronia (la modificazione delle temporalità evolutive) nell'espressione dei tratti adattivi può condurre alla speciazione. Per esempio, lo spinarello (*Gasterosteus aculatus*) presenta talvolta una forma di bentonico e una forma di limnetico. La loro «popolazione ancestrale occupa gli habitat delle specie discendenti ed esibisce i due fenotipi in diversi momenti del suo ciclo di vita, un modello che suggerisce che le diverse specie attuali non provengano da un'evoluzione parallela, ma da un'alterazione delle temporalità» di espressione di questi tratti (eterocroni) (*ibid.*). Più in generale, gli organismi "interpretano" contestualmente le tracce fenotipiche del passato e le riutilizzano;

> filogeneticamente separati, i fenotipi ricorrenti mostrano che un tipo comune di ricombinazione evolutiva è la *ri-espressione* di fenotipi persi a causa dell'eliminazione o dell'alterazione evolutiva di un meccanismo regolatore, senza l'alterazione di altri aspetti della capacità evolutiva di produrre la forma persa. [...]. Un ampio insieme di prove mostra che l'innovazione fenotipica favorisce una riorganizzazione che produce dei geni nuovi (*ibid.*).

Questo stesso tipo di riferimento, trasposto all'ontogeneìa, guida le nuove ricerche in biologia del cancro (Longo, Montévil, 2017).

Anche quando le novità evolutive possono essere permesse (*enabled*) dai cambiamenti genetici e da quelli dell'ecosistema, con effetti sui fenotipi, la loro imprevedibilità differisce radicalmente dall'imprevedibilità fisica; non c'è nessuna "creatività" nel risultato imprevedibile di un lancio di un dado o della misura dello spin di un elettrone, perché tutti i risultati possibili sono predati. Anche le nuove simmetrie nelle strutture di coerenza classica o quantistica, ad esempio l'"emergenza" di strutture autorganizzate nelle transizioni critiche o l'autorganizzazione del flusso nelle dinamiche lontane dall'equilibrio termodinamico, non creano nessuna novità in un senso biologico. In questi casi, i cambiamenti di simmetria, dovuti a cambiamenti dei parametri dati (ad esempio, la temperatura per un fiocco di neve), producono dei nuovi oggetti fisici che possono essere *quantitativamente* imprevedibili all'interno degli osservabili pre-dati e qualitativamente prevedibili (il loro tipo è prevedibile, per usare la terminologia della logica). Al contrario di quanto avviene per gli organismi, questi oggetti emergono *spontaneament*e e sono tutti simili: i fiocchi di neve, le celle di Bénard, gli uragani... appaiono regolarmente, sotto certe condizioni, perfettamente prevedibili, hanno sempre lo stesso tipo di struttura di coerenza, come si sta affermando, nel senso limitato alla stessa struttura fisico-matematica. Essi dipendono da un tempo processuale, che segue sempre lo stesso fascio di cammini, come già detto. Al contrario, in biologia gli spazi delle fasi cambiano e questi cambiamenti scandiscono il tempo storico e contribuiscono alla novità biologica, la cui manifestazione non è affatto prevedibile.

5.5
Verso il futuro: sapere e imprevedibilità

Come menzionato, se i fenotipi sono gli osservabili pertinenti, in quanto un evento quantistico (verosimilmente a-causale) può modificare un fenotipo, allora se ne può dedurre che i cambiamenti degli spazi delle fasi delle traiettorie biologiche sono caratterizzati da un'imprevedibilità intrinseca proprio nel senso della meccanica quantistica. Ciononostante, non è questo l'argomento principale. In generale, la selezione e l'*enablement* hanno luogo al livello dell'organismo sulla base dei fenotipi; delle variazioni propongono continuamente ciò che sarà eliminato o portato avanti/*enabled* da e in un ecosistema co-costruito. Come detto, tale co-costruzione non esclude un controllo discendente delle variazioni da parte dell'ecosistema, tipicamente un controllo dell'espressione del DNA attraverso la demetilazione o anche attraverso il cambiamento dei vincoli fisici sulla cromatina o sulla membrana nucleare (Bécavin, Victor, Lesne, 2012; Desprat *et al.*, 2008; Fernandez Sanchez *et al.*, 2010).

Ciononostante, il fine principale è qui di scandagliare il ruolo della storia per la comprensione del presente in biologia dunque *a fortiori* per tutte le analisi delle dinamiche biologiche future, vale a dire per l'analisi dell'imprevedibilità in biologia. Se tale ruolo è pertinente, quanto si sta affermando può contribuire a un nuovo quadro teorico e allontanerà radicalmente le analisi biologiche dalle teorie fisiche esistenti in quanto «teorie di stati o processi determinati». Tutto ciò non impedisce certo la ricerca di un'unità futura, cioè l'invenzione di una nuova teoria unificatrice, né di nuove matematiche, verosimilmente appoggiandosi su eventuali "teorie-ponte" (fisica della materia condensata, fisica della criticità o fisica statistica). Come indicato, nel corso della storia della loro disciplina i fisici hanno sempre cercato l'unità teorica e nuove matematiche e non delle "riduzioni", dopo l'unificazione di Newton della caduta delle mele galileiane e delle orbite planetarie kepleriane, passando per i lavori di Boltzmann, o per esempio di Maxwell, che unificò elettricità e magnetismo, fino alle ricerche attuali sull'unificazione dell'astrofisica o dell'idrodinamica e della microfisica (Chibbaro, Rondoni, Vulpiani, 1992).

5.6
Tracce invarianti di una storia

L'eredità è un fenomeno multidimensionale (Jablonka, Lamb, 2008). In particolare, le tracce storiche sono presenti al livello dei geni, ma anche del proteoma, delle membrane ecc., fino all'eredità culturale. È ormai ben noto che gli embrioni ereditano delle molecole di RNA dalle cellule materne attorno allo zigote e che il sistema immunitario è inizialmente ereditato dalla madre; ciò fornisce un esempio di eredità di un carattere acquisito (Lemke, Coutinho, Lange, 2004).

In Longo e Montévil (2014) si concepiscono il cammino filogenetico e ontogenetico come delle ricostruzioni permanenti, attraverso dei cambi di simmetria teorici, di una struttura coerente: l'unità organica con le sue correlazioni interne ed esterne. La sua sussistenza, tanto interna quanto la sua coerenza con l'ecosistema, è mantenuta durante il cambiamento e per mezzo del cambiamento. L'*exaptation* è il sovraccarico, in quanto adattamenti di organi a partire dalle funzioni passate servono essenzialmente per sopravvivere. Questo comportamento dinamico particolare del vivente produce transizioni critiche estese, nel senso menzionato precedentemente, estendendo la nozione di transizione di fase critica in fisica a un intervallo di tutti i parametri pertinenti (il tempo tra gli altri). In fisica, la criticità è descritta come una transizione in un punto matematico[22]. Con la transizione critica puntuale, una struttura coerente si produce o si modifica attraverso dei cambi di simmetria. In biologia, è necessario considerare tutte le traiettorie filo-ontogenetiche come cascate di cambiamenti di simmetria, a cominciare dalla semplice riproduzione cellulare.

Più precisamente, secondo questa prospettiva, non si può rendere conto dei fenomeni biologici in un unico punto del tempo né di altri parametri. L'immagine istantanea di una pietra in caduta o di un fiocco di neve informa ampiamente sull'oggetto inerte: è sufficiente aggiungerci l'analisi (equazionale se possibile) di una dinamica, anzi l'analisi di una transizione critica puntuale (per il fiocco di neve). Al contrario, la dinamica istantanea di un organismo può rendere conto solo dell'anatomia dell'organismo morto; le funzioni e l'autonomia biologica sono completamente perse, allo stesso modo delle relazioni funzionali verso l'ecosistema. Tutta la comprensione propriamente biologica richiede un certo intervallo di tempo d'analisi. Non si ha, tuttavia, solo a che fare con un processo, ma con ciò che si può chiamare "intervallo di criticità estesa". Inoltre, all'interno di questo intervallo, ogni riproduzione cellulare ha tutte le caratteristiche di una transizione critica: tipicamente, la ricostruzione di una nuova struttura coerente con le nuove simmetrie; le nuove cellule sono simili, ma non identiche (ricostruzioni leggermente differenti del DNA e bipartizione del proteoma e della membrana, una rottura di simmetria). In un organismo multicellulare, al momento di una riproduzione cellulare in un tessuto, la matrice extracellulare e la sua struttura di tensegrità sono certamente ricostruite, ma mai all'identico: l'organismo intero si trova quindi in una transizione critica estesa, un passaggio continuo attraverso delle singolarità critiche. Questi cambiamenti di simmetria caratterizzano, in questa prospettiva, le traiettorie biologiche e sono al cuore della variazione, così come dell'adattamento e della diversità, che contribuisce in modo cruciale alla stabilità biologica (Longo, Montévil, 2014). Gli invarianti storicizzati sono i prodotti e i produttori di una ricostruzione permanente di strutture relativamente stabili e pertanto localmente invarianti, a tutti i livelli di organizzazione. È bene ribadire che si stanno sovrapponendo descrittivamente l'ontogenesi e la filogenesi, poiché si considerano tutte le traiettorie filogenetiche come una somma di cammini ontogenetici e, dunque, obbedienti agli stessi princìpi (Longo *et al.*, 2015).

22. Questo è necessario per l'applicazione del metodo di rinormalizzazione a questo fenomeno (Binney *et al.*, 1992).

5.7
Spazi relazionali costruttivi e invarianza

A dispetto della natura non-genocentrica di quest'analisi, essa inizia proprio con un riferimento al DNA, la traccia chimica fondamentale della storia evolutiva di un organismo. Essa è costantemente usata da ogni cellula durante l'ontogenesi. Come per qualsiasi altro componente della vita, le funzioni del DNA possono essere interpretate solo in modo relazionale; il DNA agisce in relazione a un contesto, cioè a una cellula viva in un ambiente adatto, che può essere un organismo multicellulare; inoltre, si può dare un senso biologico al DNA e definire la sua attività solo relativamente a questo contesto. Infatti, uno stesso DNA può esprimere proteine differenti in un bruco e in una farfalla; un metabolismo indotto può modificare profondamente l'espressione dello stesso DNA anche in animali sociali (api, formiche ecc.). In certi casi, il DNA contiene la determinazione completa dell'organismo. Nella terminologia di (Montévil, Mossio, 2015), il DNA è un vincolo (fondamentale!) della filo-ontogenesi – la cellula, in contesti diversi, produce proteine usando in vari modi il DNA come un modello (*template*) vincolante.

Ora, la struttura chimica del DNA è essa stessa il risultato di una relazione storica di più contesti di attività; in altri termini, il DNA è un invariante storicizzato, relativamente stabile, che è stato formato e mantenuto attraverso contesti diversi nel corso del tempo evolutivo. Le mutazioni, le trasposizioni, le integrazioni, dovute ad esempio a retrovirus, così come molte altre forme di trasferimenti orizzontali menzionate, possono essere spontanee o dovute a differenti forme degli effetti aleatori già richiamate, o possono essere indotte da interazioni all'interno dell'ecosistema. Quando le conseguenze fenotipiche delle modificazioni del DNA diventano possibili (*enabled*) a partire dal contesto, esse contribuiscono alla stabilità relativa della storia filogenetica dell'organismo. Evidentemente, ciò non esclude che «l'innovazione fenotipica sia favorevole a una riorganizzazione che produce dei geni nuovi» (West-Eberhard, 2005). Come nel caso del cancro, ontogenesi mal funzionante (*development gone awry*; Soto, Maffini, Sonnenschein, 2008), le due strutture causali non si escludono reciprocamente e possono anche agire in sinergia, benché le "cause" ecosistemiche debbano essere maggiormente considerate (Longo, 2019). Ogni tipo di stabilità nelle relazioni e nelle strutture che ne risultano è relativo al fatto che il contesto può usare differentemente la stessa molecola proprio come un altro componente biologico, tipicamente attraverso un *bricolage* alla Jacob o attraverso un'*exaptation* alla Gould (Gould, Vrba, 1982). Per esempio, il riuso per nuove funzioni biologiche di elementi trasponibili è una forma d'*exaptation* di luoghi di fissaggio dei fattori di trascrizione (promotori e amplificatori), che giocavano precedentemente un ruolo differente, e questo influisce sull'evoluzione della regolazione genetica (Souza, Franchini, Rubinstein, 2013). Si può comparare questo fenomeno a quello delle piume che sono state *exapted* a partire dalle loro funzioni di regolazione termica, per permettere la parata nuziale e il volo degli uccelli. Le tracce della storia sono re-interpretate e acquisiscono un significato/funzione biologico differente nei nuovi contesti, e sono così modificate.

Riassumendo, la cellula e l'organismo possono usare in diverse maniere un frammento dato di DNA o l'espressione dei differenti frammenti di DNA. Delle variazioni minime (stocastiche o orientate) di un frammento di DNA o dei suoi usi possono condurre a differenti cammini ontogenetici e filogenetici.

La variazione genetica criptica è un altro esempio di questo fenomeno. Secondo Paaby e Rockman (2014): «la variazione genetica criptica (VGC) è invisibile in condizioni normali, ma può alimentare l'evoluzione quando le circostanze cambiano. In teoria, la VGC può rappresentare una riserva segreta massiva di potenziale adattivo o anche un insieme di alleli deleteri che necessitano di essere repressi costantemente». Similmente, il riconoscimento crescente dell'importanza del trasferimento orizzontale dei geni nell'evoluzione (Keeling, Palmer, 2008) necessita di una certa conoscenza del ruolo passato dei geni trasferiti per comprendere pienamente le loro funzionalità presenti e future. Come nel caso della cognizione, delle differenze misurabili nell'utilizzo presente o futuro possono dipendere da tracce differenti, ma non-misurabili *a priori* o da differenti usi della stessa traccia di un'attività passata – delle forme di biforcazione nelle traiettorie filogenetiche dovute alla storia anteriore. La differenza con la fisica dovrebbe essere chiara: in quest'ultima, la scelta di una biforcazione dipende da una fluttuazione locale al "momento" e nel "luogo" della biforcazione, nella misura in cui la dipendenza dal cammino può essere presa in considerazione attraverso un'adeguata estensione dello spazio delle fasi; in biologia, la biforcazione può dipendere dalle variazioni passate non rilevabili o attualmente non-pertinenti, il che non esclude che siano potute essere pertinenti in passato. Dalla prospettiva proposta, le conseguenze fenotipiche di un frammento di DNA possono essere comprese solo in relazione con un contesto epigenetico, dell'organismo e dell'ecosistema. Così, si può aver bisogno, per comprendere (cioè tanto per conoscere quanto per prevedere) i molteplici usi possibili di un frammento di DNA, anche della conoscenza dei suoi usi in contesti passati (verosimilmente sconosciuti), che sono potuti essere co-costruiti dagli organismi e dai loro DNA.

La struttura e il ruolo biologico del DNA sono pertanto il risultato dei contesti di interazione che hanno contribuito alla loro storia. Di qui, il DNA mantiene una struttura e si esprime in un modo relativamente invariante da così tanto tempo che le trasformazioni del contesto riproducono interazioni simili e riferimenti che le rendono possibili (*enabling*). Ciononostante, qui si sostiene che in un contesto differente il DNA può essere usato in maniera diversa. La stessa osservazione vale per tutti gli altri elementi di un organismo. In generale, secondo questa prospettiva, concettualmente ispirata alla matematica, queste trasformazioni del contesto producono e definiscono degli invarianti storicizzati delle strutture biologiche. Essi sono richiesti per la conoscenza del presente e per l'analisi della prevedibilità. Come detto, le piume dei dinosauri sono state un risultato relativamente stabile d'interazioni ecosistemiche in cui lo scambio termico gioca un ruolo preponderante. Esse sono durate qualche decina di milioni di anni. In seguito, solo la clade dei dinosauri volanti e impiumati è sopravvissuta, cosa che sarebbe stato difficile da predire da osservatori eventuali dei dinosauri con piume sporadiche che corrono; l'*exaptation* delle piume è stata cruciale per la loro sopravvivenza. Inoltre, la diversità crescente all'interno del clade ha contribuito alla sua stabilità evolutiva.

In biologia, l'invarianza relativamente alle trasformazioni ecosistemiche non è esatta né permanente; inoltre, il fatto che sia storicizzata è essenziale alla relativa stabilità degli organismi e delle specie attraverso la variazione, l'adattamento e la diversificazione. Queste proprietà sono i componenti essenziali della sopravvivenza di una popolazione o di una specie e, quindi, della stabilità biologica a lungo termine.

5.8
Conoscenza del presente e invenzione del futuro

Seguendo quest'analisi, in matematica gli oggetti sono definiti dalle loro proprietà invarianti per trasformazioni negli spazi: si tratta, pertanto, di una definizione relazionale. La natura costruita e concettuale delle strutture matematiche autorizza a definirle esattamente dall'insieme di trasformazioni all'interno di uno spazio dato (o di una categoria), o possibilmente tra differenti contesti ristretti e ben definiti (più categorie nel linguaggio matematico contemporaneo)[23]. In un organismo, al contrario, quasi tutto è legato a quasi tutto il resto e, come è noto dopo Darwin, le variazioni si sviluppano in permanenza e sono sempre "correlate". È anche il caso dell'ecosistema, sebbene in modo più debole[24].

5.8.1. LA COMPRENSIONE DELLA VITA PRESENTE

È possibile comprendere completamente e determinare la struttura e la funzione di un elemento di un organismo o di un ecosistema attraverso la struttura presente (per esempio, chimica) e attraverso le sue correlazioni biologiche? Continuando le argomentazioni appena sviluppate, la risposta è negativa perché ciascun elemento è il risultato non solo delle relazioni attuali, ma anche della storia delle relazioni passate che hanno contribuito a produrre le strutture esistenti e le loro funzioni. Si è presentato il DNA come un esempio tipico di ciò. Nessun segmento di DNA ha funzioni definite; il polimorfismo e la pleiotropia (un gene è legato a più fenotipi, più geni sono legati a un solo fenotipo) permettono funzioni molto differenti, a cominciare dalle relazioni multiple (*many-many*) tra geni e proteine, una forma di "degenerazione" nel senso di Edelman e Gally (2001).

In effetti, la degenerazione è onnipresente in biologia, dal DNA al cervello. Essa può essere specificata come: 1. una degenerazione "sistemica", uno stesso sistema contribuisce a funzioni distinte; 2. una degenerazione "funzionale" dei sistemi non-isomorfi che partecipano a una medesima funzione (Bailly, Longo, 2006). Essa differisce dalla ridondanza nei sistemi

23. Nella matematica contemporanea, l'approccio di Grothendieck è la miglior forma di matematica relazionale esistente; inoltre, la sua applicazione alla fisica contemporanea viene organizzata in questo stile (Zalamea, 2012). La definizione di concetti e strutture nuovi, nell'approccio relazionale di Grothendieck, è in continuità con la prospettiva basata sugli invarianti e le trasformazioni sviluppate da Klein a Weyl e MacLane (il fondatore della teoria delle categorie), ma va ben oltre: le definizioni di Grothendieck sono date nel quadro matematico "più puro", anche se dotate di senso, di modo che la loro invarianza e le trasformazioni sono "intrinseche" alla nuova nozione (Longo, 2015).

24. Un organismo è un ecosistema con fenomeni cruciali di simbiosi tra le specie. Ciononostante, un ecosistema non è un organismo. Le correlazioni della sua struttura sono più deboli, almeno secondo la metrica (ma anche per quanto riguarda le funzioni). Per esempio, due cellule in uno stesso tessuto non si allontanano mai troppo e mantengono le loro funzioni. Nondimeno, in una colonia di formiche, due lavoratrici possono allontanarsi di molto, ma mantengono le loro funzioni. Ben inteso, la maggior coerenza e autonomia degli organismi è fatta per lo più di vincoli e delle loro correlazioni (Montévil, Mossio, 2015).

artificiali, i computer per esempio, in quanto quest'ultima è realizzata dalla ripetizione di componenti identici.

La degenerazione sistemica corrisponde così in particolare alle differenti funzioni che un medesimo componente biologico può aver avuto nel corso della sua storia costitutiva in differenti contesti relazionali. Gli omologhi ne sono conseguenza: un'origine comune è seguita da funzioni o, addirittura, da anatomie divergenti (per esempio, le zampe anteriori *vs* le ali nei tetrapodi[25]). In certi casi, gli omologhi al livello biochimico, per esempio le «interazioni ligandi-recettori e le loro controparti intermedie di segnalazione a valle», possono mostrare «gli omologhi funzionali tra le strutture e le funzioni in apparenza estremamente dissimili come gli alveoli polmonari e i glomeruli renali, la pelle e il cervello, il cervello e i polmoni» (Torday, 2015). Reciprocamente, una funzione data può essere il risultato di differenti cammini evolutivi, e questo permette di comprendere le diverse anatomie (degenerazione funzionale); le analogie sono esempi tipici (per esempio le ali degli insetti e quelle degli uccelli). La comprensione (determinazione teorica) di questi fenotipi dipende così dalla conoscenza ricostruita, paleontologica se necessario, delle loro radici comuni, addirittura delle origini diverse per funzioni analoghe – il tutto misurabile, se possibile.

Ora, le potenzialità della degenerazione funzionale e strutturale sono conseguenze di una storia passata costitutiva, ma non è necessario che esse si manifestino nella situazione presente. Detto altrimenti, ogni componente di un organismo o di un ecosistema è il risultato di strutture relazionali in costante trasformazione che hanno potuto lasciare in questo componente una traccia dei cambiamenti per ciascun evento storico importante. Diventa così un invariante storicizzato, risultante da trasformazioni del contesto nel suo tempo storico.

In questo modo, anche una conoscenza completa, ammesso che sia possibile, dello stato presente delle correlazioni interne a un organismo e a un ecosistema, non fornisce una determinazione dello stato di cose né delle sue dinamiche future, se necessario in termini di probabilità, come la posizione e la quantità di moto fanno in meccanica classica. L'intera storia dell'organismo ha contribuito alla costruzione del suo stato presente, attraverso le dinamiche passate delle sue relazioni di cui i significati persi possono contribuire alla determinazione presente e alla costruzione futura di nuovi significati, come le variazioni genetiche critiche. Di qui, in contrasto con la

25. Cfr. http://www.britannica.com/EBchecked/topic/270557/homology.

fisica, nessuno spazio delle fasi non-storico e pre-dato può includere tutti gli osservabili passati e futuri e le loro possibili descrizioni qualitative, anche perché gli osservabili passati possono essere inaccessibili alla misura. Questi fenomeni non rendono la teoria dell'evoluzione di Darwin non-scientifica, come ha affermato René Thom e come pensano coloro i quali tentano di "correggerla" imponendo la matematica della fisica alla biologia; essi sono, al contrario, al cuore delle scienze dell'evoluzione e dello sviluppo.

Riassumendo, il significato biologico di un elemento di un organismo, sia esso il DNA o un organo, ha una storia cangiante. La struttura chimica di un segmento di DNA è prodotta attraverso la variazione, la selezione e la plasticità. Similmente, solo un'analisi dell'interazione di omologie e analogie tra gli occhi dei polipi e quelli dei vertebrati può aiutare a comprendere le loro strutture e le rispettive funzioni, in quanto le caratteristiche degli occhi degli animali bilaterali non sono solo dovute ai vincoli funzionali presenti, ma sono anche una conseguenza della loro storia evolutiva[26]. Poiché i contesti relazionali passati possono essere difficili da misurare o possono essere ormai persi e le loro conseguenze sulle strutture esistenti possono contribuire a una comprensione delle funzioni presenti così come, potenzialmente, di quelle future, la sola descrizione in termini di funzioni e relazioni presenti è necessariamente incompleta. In breve, il senso biologico è una questione di costruzione storica. Inoltre, in questo approccio, deve sempre essere dato in un presente esteso, un intervallo esteso di criticità (Longo, Montévil, 2014).

Certamente, tutto ciò si sovrappone all'incompletezza delle descrizioni matematiche degli stati esatti in fisica. Come detto, la misura classica è sempre approssimata, cioè un intervallo, per principio (a meno di fluttuazioni termiche e gravitazionali), e, nel caso della non-linearità della determinazione matematica, questo produce l'aleatorio classico, inteso come imprevedibilità deterministica. Analogamente, benché differente (non-omologa), la meccanica quantistica introduce un'indeterminazione della misura. In entrambi i casi, le determinazioni fisiche, attraverso la misura e

26. Tipicamente, nelle piovre, le fibre nervose passano dietro la retina, mentre nei vertebrati queste si dirigono verso la retina e la perturbano con un "punto cieco". Le storie filogenetiche e ontogenetiche differenti di questi due sistemi nervosi aiutano (parzialmente) a comprendere questa differenza e mostrano che non c'è ottimizzazione, poiché gli occhi dei vertebrati possono essere considerati "migliori" a causa della presenza di una cornea, ma non per il percorso delle fibre nervose (la leggenda racconta che Helmoltz, un pioniere dell'analisi strutturale dell'occhio, avesse proposto di licenziare il creatore dell'occhio dei vertebrati, così assurdamente connesso...).

la formalizzazione matematica, sono sincroniche: ignorano le storie passate (con le eccezioni parziali menzionate nei PARR. 5.1 e 5.2), sempre riducibili a un'analisi per stato di fase con uno spazio delle fasi sufficientemente ricco o, nella migliore delle ipotesi, inserendo nell'analisi un tempo processuale. Così, l'incompletezza della conoscenza e della determinazione, in fisica matematica, non dipende, in principio, dalla maniera in cui si accede allo stato presente, cioè attraverso la sua misura, con al massimo una certa attenzione al passato in uno spazio delle fasi dato.

In questo modo, queste argomentazioni arricchiscono l'incompletezza sincronica della conoscenza propria della fisica, che si applica certamente anche ai sistemi biologici, per mezzo dell'incompletezza *diacronica* della determinazione biologica, dovuta in particolare alla misura del passato. Inoltre, la maggior parte della storia evolutiva è definitivamente persa, insieme alla genetica, all'epigenetica e alle altre forme di interazione passate. In fisica, per principio, non si può scendere sotto la migliore misura classica o sotto la costante di Planck per le variabili quantistiche coniugate. In biologia, ci sono anche delle lacune inevitabili nella conoscenza e nelle approssimazioni rispetto alla misura delle storie passate, ma, come si vedrà, nessuna teoria oserebbe quantificarle, come ha potuto fare la fisica quantistica di Planck[27].

5.8.2. INVENTARE IL FUTURO

> ... no hay camino,
> *... se hace camino al andar.*
> A. Machado

Dopo quanto detto, non è possibile fornire una lista completa della maniera in cui una struttura degenerata può funzionare in un nuovo contesto, poiché ciò potrebbe richiedere una conoscenza completa delle funzioni passate di questa struttura. Alcune possono essere riattivate in questo nuovo contesto, benché senz'altro in modo differente. Questo può ricordare ciò che si è detto precedentemente sulla protensione e la ritenzione negli animali: una forma di riattivazione sempre diversa di un passato reinterpretato.

27. In astrofisica, al contrario, è possibile "vedere" il passato nel presente, nei limiti della misura sincronica: è sufficiente osservare una galassia, una stella sufficientemente lontana, ma tutti gli elementi di questo passato, nel presente, possono aver luogo solo oggi. Questo non impedisce che possa insegnarci qualcosa sul nostro passato.

In altri termini, da un lato, l'intera storia relazionale di un organismo o di un ecosistema contribuisce alla sua determinazione attuale, dall'altro, contribuisce anche alla maniera in cui può reagire a un cambiamento esterno o interno. La conoscenza delle reazioni future richiede almeno la conoscenza delle funzioni e delle relazioni passate, che possono essere parzialmente o largamente inaccessibili.

Per questo, si interpreta la teorizzazione fisica attraverso considerazioni propriamente biologiche. Se la storia contribuisce in modo cruciale alla determinazione dei sistemi biologici, essa li rende anche intrinsecamente imprevedibili, al di là dell'imprevedibilità fisica, riferita all'incompletezza della conoscenza e dunque della misura, del passato. È possibile dare dei limiti intrinsechi a questa misura?

In fisica classica, è possibile valutare localmente le fluttuazioni termiche e gravitazionali e, così, fissare un limite inferiore all'intervallo della misura (Rowan, Hough, Crooks, 2005). In fisica quantistica, la costante di Planck sembra essere un valore minimo robusto, anche se approssimativo, per la misura (delle variabili coniugate). In biologia, per un osservabile fissato, l'ampiezza del migliore intervallo di approssimazione teorica di una misura storica dovrebbe, in principio, crescere nella misura in cui si va indietro nel tempo. Ciononostante, di quali osservabili e funzioni è una misura esatta? La conoscenza di alcune funzioni e osservabili del passato potrebbe essere del tutto persa.

Certamente, si può interpretare il ruolo di un passato (sconosciuto) nella costruzione del futuro con ottimismo. Riutilizzando le tracce invarianti di un contesto relazionale scomparso, l'evoluzione (e lo sviluppo) *crea* la novità inattesa. Il riuso non è mai all'identico, cammini filogenetici o dello sviluppo identici non esistono affatto. Il ruolo degli eventi rari, che saranno discussi nel prossimo paragrafo, è sufficiente a mostrarlo. Di qui, alle ragioni fisiche per l'esistenza della novità in biologia (per esempio, gli eventi molecolari aleatori, talora di natura quantistica, le conseguenze fenotipiche e la biorisonanza descritta in Buiatti, Longo, 2013) si aggiunge il ruolo della storia nella conoscenza e nella determinazione, al contempo, dello stato presente e delle dinamiche biologiche future.

La differenza maggiore relativamente alle teorie fisiche esistenti, ma con un ponte parziale verso la fisica della materia condensata e la fisica statistica, è che lo spazio delle fasi cambia in generale: gli osservabili pertinenti, i fenotipi, sono strutture cangianti. Di qui, in biologia è lo spazio delle fasi stesso a essere imprevedibile. La sfida matematica è di passare da un'analisi dell'aleatorio interno a uno spazio delle fasi dato, come in fisica classica e quantistica, alla costituzione dello stesso spazio delle fasi. Ciò induce l'impossibilità di misurare l'aleatorio attraverso la probabilità (un problema che è anche in fisica molto delicato; Longo, Mugur-Schächter, 2014). Ciononostante, la matematica è una delle maggiori creazioni umane; per fortuna essa non era "già là", nell'Universo assoluto newtoniano pre-dato dalla teoria degli insiemi. Finora si è inventato tutto ciò di cui aveva bisogno la fisica e non solo. In certi casi, ci sono voluti decenni per avere un quadro coerente per idee fisico-matematiche nuove, per esempio la funzione δ di Dirac nelle distribuzioni di Schwartz (1951). Lo statuto matematico dell'integrale di Feymann in fisica quantistica non è sempre molto chiaro, per ora è "una soluzione senza equazioni", un'invenzione significativa. Come si dice in Longo (2015), la biologia merita di interagire in modo co-costitutivo con le matematiche contemporanee e non solo con quelle create per la fisica del XIX secolo, come le analisi in termini di geodetiche (alla Maupertuis o alla Hamilton, tra 1750 e 1850) di traiettorie filogenetiche.

Si è provato a descrivere la creatività della vita a partire dalla vita, in termini di imprevedibilità intrinseca dello spazio delle fasi (in un certo senso, dell'ecosistema), e a partire dal ruolo della storia in biologia. Una comprensione della creatività in termini di incomprensibilità della descrizione dei fenotipi può collegare questo approccio a quelli matematici della teoria algoritmica dell'informazione (Calude, 2002), a un livello puramente epistemico; la *descrizione linguistica* dei fenotipi può essere impossibile prima della loro apparizione, essa può così essere considerata come incomprimibile nel tempo – non c'è nessun modo di generare anticipatamente la lista completa dei fenotipi di un'epoca futura. Ciò deve restare epistemico ed espresso solo in termini "linguistici" per il fatto che il quadro computazionale discreto della teoria algoritmica dell'informazione è molto incompleto per quanto riguarda le dinamiche fisiche che dovrebbero essere sempre più spesso comprese nel continuo (Longo, Montévil, 2017). Tutto ciò è vero *a fortiori* per l'evoluzione biologica. È bene ricordare che in matematica una struttura è discreta quando la sua "topologia naturale" è discreta, cioè quando l'accesso ai dati o la misura sono esatti. Raramente questo ha senso in fisica e ancora meno in biologia; le dinamiche fisiche complesse, dunque almeno le non-lineari, e le dinamiche biologiche dipendono sempre da fluttuazioni e da variazioni che si comprendono meglio in topologie e metriche continue. L'aleatorio, in quanto imprevedibilità relativa alla teoria data, al cuore di questo approccio, ha senso solo con una misura quantistica indeterminata o con una misura classica approssimata, nel continuo matematico delle teorie classiche e relativistiche. In tal modo, l'incomprimibilità temporale della descrizione dei fenotipi può soltanto riferirsi alle forme contingenti della conoscenza e ha una debole oggettività scientifica – essa può dare un quadro delle difficoltà.

Riassumendo, ai problemi della misura sincronica si è aggiunto il problema della conoscenza e della misura diacronica o l'approssimazione dell'accesso al passato. Inoltre, si è passati da una visione dell'aleatorio in quanto imprevedibilità interna allo spazio delle fasi, come in linea di principio avviene in fisica, alla costruzione stessa dello spazio delle fasi; ciò che è imprevedibile non è il valore numerico di un osservabile dato, anzi il numero delle dimensioni pertinenti, come in fisica statistica, ma lo spazio stesso degli osservabili. La sua comprensione richiede una valutazione qualitativa della natura, al di là della stessa valutazione probabilistica.

5.9
Il ruolo della diversità e degli eventi rari

Si è discusso ampiamente della diversità in quanto componente della stabilità strutturale della vita, negli organismi, nelle popolazioni e nelle specie. La diversità dipende anche dall'aleatorio, che non è per nulla un "rumore" (ammesso che questa parola abbia un senso) in biologia come si è sottolineato in (Bravi, Longo, 2015) attraverso una critica tecnica della *noise biology* in buona parte basata sulla fisica statistica. In questo articolo, si è giustificato il ruolo costruttivo della diversità per la stabilità degli organismi o lo si è esemplificato con numerosi riferimenti (il sistema immunitario, i polmoni, il fegato[28] ecc.).

La diversità è il risultato della specificità di ciascuna cellula individuale e di ciascun organismo; per esempio, anche le cellule del fegato sono il prodotto di una (corta) storia che è sufficiente per generare diversità attraverso

28. Per quanto riguarda il fegato, in opposizione al sistema immunitario e anche ai polmoni, in Bravi e Longo (2015) si è ipoteticamente accettata la tesi della "biologia del rumore" (*noise biology*) per criticarla (vale a dire che l'aleatorio, in quanto "rumore", dovrebbe essere analizzato con il teorema del limite centrale). Si è osservato che nel fegato solo la produzione enzimatica media è rilevante, contrariamente agli organi menzionati. Ciononostante, anche in questo caso, l'approccio statistico è errato. In effetti, anche un organo in apparenza così "uniforme" contribuisce alla sua stabilità e a quella dell'organismo attraverso un'importante aneuploidia e poliploidia delle sue cellule (quasi il 50%). Attraverso questa forma di diversità cellulare, il fegato risponde meglio alle intossicazioni e alle lesioni: «dei sottoinsiemi di epatociti aneuploidi, che sono differenzialmente resistenti alle lesioni, restano in buona salute e rigenerano il fegato e restaurano la sua funzione» (Ducan, 2013).

una cascata di rotture di simmetrie (in questo caso, attraverso la copia del DNA e la divisione del proteoma a ogni divisione cellulare). Pertanto, ogni cellula e più in generale ogni individuo biologico sono rari in quanto sono esseri specifici e storici.

Ciononostante, questa diversità, in quanto individualità o specificità interna a una gamma di fattibilità, contribuisce alla stabilità globale di un organismo, di una popolazione o di una specie, nella forma indicata precedentemente. Tipicamente, in una specie, la diversità può essere compatibile con la riproduzione sessuale, che si consideri o no l'inter-riproducibilità come un criterio (debole ma) sufficiente per distinguere una specie.

Devono essere tuttavia considerati alcuni casi chiave. Una diversità debolmente fattibile o non completamente fattibile può all'improvviso diventare pertinente, allorché un cambiamento dell'ecosistema modifica la gamma di fattibilità e rende possibile (*enables*) la singolarità di un piccolo numero di individui e accresce le differenze specifiche. Ciò può condurre alla speciazione sotto queste forme (allopatriche, peripatriche ecc.), che sono spesso il risultato di eventi rari di migrazioni individuali o di piccoli gruppi, come mostra (Zelnik, Solomon, Yaari, 2015). Secondo Venditti, Meade e Pagel (2010), in numerosi casi «nuove specie emergono a partire da eventi singolari, ciascuno raro ma sufficiente a causare la speciazione». Nella maggior parte dei casi, l'esplorazione permanente di novità, grazie all'instabilità ecosistemica, genetica o alla loro interazione, porta a dei "mostri speranzosi" (*hopeful monster*), nel senso ampio di Goldschmidt (1960), ripreso in Gould (2002) – essi sono ora compresi meglio come una complessa commistione di cambiamenti cumulativi e di salti puntuali (Chouard, 2010), che aprono nuovi cammini filogenetici possibilizzati (*enabled*) da una nuova nicchia ecologica co-costruita. Quando questa è sufficientemente importante, l'inevitabile variazione, propria di tutte le riproduzioni, può generare un "mostro" rispetto agli individui esistenti, grazie a un effetto cumulativo o a un cambiamento repentino. Questo può (*hopefully*) trovare il suo cammino in un ecosistema cangiante. Si noti che in generale un *hopeful monster*, fattibile o no, fallisce, ma in rari casi sopravvive e forma una nuova specie, verosimilmente grazie ai rari cambiamenti dell'ambiente. Uno degli esempi più famosi di fenomeni evolutivi, il cancellamento evolutivo dei fringuelli delle Galapagos, è oggi compreso come legato a eventi "El-Niño" rari e forti che hanno modificato l'approvvigionamento alimentare dei fringuelli (Grant, Grant, 1993).

In questo quadro concettuale, il tempo storico è quindi scandito dai cambiamenti pertinenti, per la maggior parte rari, dello spazio delle fasi evolutivo[29]. In certi casi, comunque, la speciazione può prodursi all'interno di un insieme di simmetrie pre-date. È il caso di nicchie particolari che favoriscono la sopravvivenza di rari mostri ciechi e contribuiscono così alla formazione di 170 specie di "pesci ciechi" (pesci cavernicoli). Si può spiegare in modo simile la perdita delle ali dei kiwi, specie di uccelli del genere *Apterygiformi* che vivono in Nuova Zelanda. In questo caso, certi mostri speranzosi privi d'ali sono stati favoriti da un ecosistema senza predatori e da un terreno brulicante d'insetti. Probabilmente, la scarsità di insetti volanti, propria di queste isole, ha reso il piccolo uccello goffo più efficace dei suoi cugini volanti che si sono estinti.

Ciononostante, eccetto questi casi particolari, la complessità fenotipica tende mediamente ad aumentare nel corso dell'evoluzione, in seguito a una diffusione aleatoria delle asimmetrie degli spazi (Gould, 1996), seguendo la misura delle complessità anatomiche, formalizzate in Bailly e Longo (2009). I casi di *exaptations* menzionati nei paragrafi 4 e 7 corrispondono a un aumento della complessità e di strutture radicalmente nuove, come l'orecchio interno, le piume ecc. Allo stesso modo, si possono menzionare le corna gigantesche e molto articolate del megalocero (grande cervo dell'Irlanda del quaternario), un fenotipo nuovo e insolito, come pure le sue spalle, attraverso le quali si comprende la deformazione necessaria dovuta a criteri fisici di allometria relativi al supporto di siffatte corna; ora, le sue grandi spalle sono diventate il supporto possibile, *spandrel* secondo la terminologia di Gould (2002), per delle corna sessualmente attraenti, necessarie dal punto di vista fisico. Ognuno di questi casi è il risultato di eventi rari nel corso dell'evoluzione; talvolta l'apparizione di un *hopeful monster* e di un contesto favorevole (*enabling*) sono eventi rari. La combinazione sporadica di eventi altrettanto sporadici forma le parti o le reti della storia filogenetica.

È bene sottolineare che tutto ciò si allontana dalle interpretazioni comuni in biologia matematica, frequentemente caratterizzate dall'applica-

29. La rarità, tuttavia, può essere storica o relativa. Nell'evoluzione sperimentale degli *Escherichia coli*, delle mutazioni estremamente rare possono divenire molto frequenti in modo inatteso, in seguito a una storia particolare della popolazione. Segnatamente, la loro espressione fenotipica può dipendere, in maniera contingente, dalle mutazioni precedenti all'interno di una storia di 30.000 generazioni (Blont, Borland, Lenski, 2008). Ciononostante, sulla base di questi autori, tutto ciò non è il risultato di un cambiamento cumulativo e graduale; gli eventi rari possono diventare frequenti dopo una lunga storia in un ambiente raro (nel caso menzionato, un luogo artificiale con glucosio limitato e che vincola anche il citrato; *ibid.*).

zione dei quadri matematici della fisica alla biologia. Come già posto in evidenza, René Thom ha presentato lucidamente la filosofia che dirige queste analisi, cioè che «il quadro globale delle soluzioni possibili [...] preesiste al rumore che influenza il sistema». Così, una «fluttuazione diventa pertinente, ma soltanto nel quadro di una biforcazione preesistente». È la ragione per la quale, dopo Thom, l'insistenza di Prigogine sul rumore (Amsterdamski, 1990) non può essere al cuore dell'analisi scientifica: ciò che importa a Thom è la «definizione di tutti i sottogruppi nei quali il gruppo di simmetria dato può rompersi» (ivi, pp. 70-1). Una rottura di simmetria in uno spazio delle fasi pre-dato è, forse, una maniera (molto parziale) di descrivere ciò che ha prodotto i pesci ciechi o i kiwi, ma non rappresenta quanto avviene nella maggior parte dei cambiamenti evolutivi, come mostrano gli esempi forniti di *exaptation* e sovraccarico, che aumentano la complessità attraverso la creazione di nuovi fenotipi. Riassumendo, in una dinamica fisica non-lineare, una fluttuazione causa la scelta di un cammino o di un altro in un insieme pre-dato di possibilità, come spiega Thom. Inoltre, quando il sistema incontra una biforcazione (una transizione critica), una fluttuazione produce *sempre* ciò che spingerà la dinamica su un cammino (una forma) o un altro tra quelli possibili e pre-dati. In fisica, la struttura matematica del mondo o almeno lo spazio delle fasi di una teoria data, deve essere posto *a priori*: si tratta di requisiti necessari per scrivere le equazioni. In tutte le *n* forcazioni, le fluttuazioni possono essere divise in *n* classi di equivalenza di probabilità differenti, ciascuna conducendo a uno degli *n* cammini possibili. In ognuna delle *n* divisioni, le fluttuazioni sono generiche e non-rare. Oltre questo, non c'è scienza possibile, afferma Thom – e questa visione plasma implicitamente la modellizzazione matematica ancora dominante in biologia (unitamente ad altre scienze storiche, come l'economia; Koppl *et al.*, 2015).

In una scienza storica, al contrario, è la diversità e la rarità di eventi e osservabili nuovi che fanno la storia, perché in una popolazione gli organismi, specifici e diversificati, che possono produrre una speciazione, sono per la maggior parte rari. Inoltre, questi organismi si estinguono con maggior frequenza; raramente essi co-costituiscono all'interno di un ecosistema compatibile (*enabling*) i detti cammini evolutivi che non sono pre-dati e modificano, così, lo spazio delle fasi (ad esempio, con orecchie interne, piume, ali, braccia umane ecc., che cambiano il vivente e la sua interazione con l'ecosistema).

Evidentemente, un'analisi dei vincoli fisici, ad esempio dei vincoli allometrici, possono mettere in risalto certe ottimizzazioni strutturali necessarie. Le spalle del Megalocero, già menzionato, ne sono un esempio. Tuttavia, sono state arricchite da un supplemento di peli multicolori (il loro ruolo di *spandrel*), che non sono né necessari né ottimali. Il tentativo è così di comprendere la differenza tra questi due fenotipi pertanto correlati, in particolare attraverso la cascata di eventi rari perfettamente sconosciuti che hanno lasciato traccie di entrambi nel lignaggio germinale.

La derivabilità fisico-matematica del primo fenotipo dovrebbe essere chiara. Si aggiunga che, dopo Hamilton, si comprende una geodetica non in quanto dovuta a una "direzione", a un "fine" (il fiume non punta al mare scegliendo il percorso ottimale, né un raggio di luce il suo obiettivo), ma in quanto risultati della massimizzazione *locale* di un gradiente (per ogni punto, il fiume segue la pendenza localmente massima, lo stesso fa la luce in una varietà riemanniana, afferma la relatività: un *integrale* di gradienti locali dà il loro percorso ottimale). Condizionati da vincoli più complessi, l'allometria e altri criteri fisici possono, allo stesso modo, fornire *a priori* degli elementi di comprensione di questa struttura ossea, in quanto conseguenza delle corna giganti (la cui esistenza è un'altra questione, prossima a quella dei peli). Il secondo fenotipo non è affatto necessario: in altri casi non esiste affatto una pelliccia supplementare, o ce n'è sul petto, sul dorso... con la stessa funzione. Questi peli non sono per nulla ottimali: al massimo hanno dato un vantaggio selettivo per i cervi che li avevano, *ma nessun gradiente locale può permettere di derivare questo vantaggio globale per la riproduzione*, una direzione, un "fine", che gli si attribuisce *a posteriori*[30].

In conclusione, non è il rumore che governa il mondo, ancor meno il mondo del vivente, poiché l'aleatorio, da un lato, gli è funzionale non solo attraverso degli usi statistici su grandi numeri, ma anche (o soprattutto) come componente della diversità e dell'adattamento su piccoli numeri dunque grazie non a degli strumenti, ma alla differenza nelle diffusioni (per esempio, la distribuzione asimmetrica del proteoma nel momento della riproduzione cellulare) o a eventi rari; dall'altro, esso è fortemente canalizzato dalla chiusura dei vincoli dell'organismo (Montévil, Mossio, 2015), a partire dal DNA, vincolo fondamentale dell'evoluzione e dello sviluppo. Esso non è più governato da un Universo matematico pre-dato con tutte le

30. La frase «i geni scelgono una forma sugli scaffali delle forme possibili» è incoerente o incompleta: è la lista delle coppie "forma e funzione" che non è data, o "forma e senso", o ancora "forma e interpretazione". Quando Marconi nel 1900 usa un cacciavite di metallo, ereditato da suo nonno, come antenna per la sua prima trasmissione radiofonica, quale scienza, quale dio avrebbe potuto, nel 1820, quando il cacciavite venne prodotto, includere nel suo spazio dei possibili questo "fenotipo"?

sue biforcazioni possibili “preesistenti”, in uno spazio di tutte le geodetiche possibili: la chiusura dei vincoli è una traccia storica cangiante, che trova il suo “senso” storico in un organismo e in un ecosistema; l’interazione tra i due impedisce sviluppi incompatibili, rende possibile (*enables*) l’*exaptation* e il sovraccarico, ma non forza nessuna geodetica, eccetto qualche struttura fisica, conseguenza diretta o indiretta delle funzionalità biologiche, la cui determinazione e imprevedibilità merita un’altra analisi (e, un giorno, una nuova matematica)[31].

In che senso, però, un evento raro è raro?

5.9.1. DI NUOVO SULLA FREQUENZA DEGLI EVENTI RARI

Ben al di là della fisica del rumore, che si riferisce alle fluttuazioni frequenti ma deboli, un dominio molto interessante della fisica tratta delle «fluttuazioni ampie e rare», principalmente nelle code delle distribuzioni e dunque a probabilità molto deboli (Bertini *et al.*, 2015; Vulpiani *et al.*, 2014). Questa teoria delle *deviazioni importanti* (*large fluctuations*), nei sistemi sia all’equilibrio sia lontani dall’equilibrio, arricchisce notevolmente l’analisi tradizionale della fisica classica e della fisica statistica: essa sottolinea l’importanza delle fluttuazioni rare negli spazi delle fasi pre-dati. Queste modificano le probabilità delle dinamiche possibili in un modo pertinente e inatteso, lungi dall’equilibrarsi in media. Infatti, la distribuzione delle probabilità delle fluttuazioni deboli (in altri termini, del rumore) è sempre gaussiana, obbediente al teorema del limite centrale; al contrario, per le fluttuazioni importanti, si osserva un comportamento fortemente distinto da quello gaussiano (Hurtado, Lasanta, Prados, 2018). Molti esempi sono forniti in Kogan (2018), laddove l’analisi delle fluttuazioni importanti e degli eventi rari è condotta sin nei dettagli, sottolineandone l’importanza. In un certo senso, questi nuovi approcci vanno ben al di là del principio fisico di Cournot per il quale «è praticamente certo che un evento con una probabilità molto debole non avverrà» (ed è così trascurabile dall’analisi).

Ciononostante, queste singolarità appartengono sempre a un insieme prestabilito di eventi o a un possibile sottogruppo di un gruppo dato di

31. Sulla base di quanto è stato proposto riguardo gli spazi delle fasi e le dinamiche biologiche qui, nei due libri e negli articoli che precedono questo testo, i seguenti lavori (Montévil, 2017; Montévil *et al.*, 2016; Sarti, Citti, Piotrowski, 2019) aprono nuove maniere di intendere la modellizzazione e possono essere degli strumenti matematici originali per le analisi del vivente.

simmetria in uno spazio delle fasi predefinito. In biologia, al contrario, è solo *a posteriori* che si può considerare come "possibile" un *hopeful monster* che ancora non esiste o che risulta da un'*exaptation* o da uno *spandrel* o da un'infinità di altri eventi rari che scandiscono il tempo storico del cambiamento degli spazi delle fasi dell'evoluzione. In questo modo, però, se non si può attribuire una probabilità a un fenotipo che non esiste ancora, che significa il termine "raro"? Quella della rarità è una valutazione *a posteriori*, come per la maggior parte o per la totalità delle valutazioni evolutive per cui «questo fenotipo è migliore di quell'altro». Similmente, un fenotipo che non esiste ancora può essere considerato *a posteriori* come raro, all'interno di una popolazione diversificata, quando le sue prime occorrenze e/o condizioni di possibilità ecosistemiche sono state osservate *a posteriori* in una piccola popolazione. In altri termini, si tratta di una valutazione *a posteriori* riguardante un nuovo fenotipo o un successo imprevedibile di un fenotipo valutato "anormale".

Rispetto a un esempio di un evento evolutivo temporalmente vicino (Harms, Thornton, 2014), riconoscono prima di tutto che «è difficile sapere quanto prodotto in un passato remoto» al fine di comprendere pienamente le funzioni biologiche presenti e ricostruiscono, dunque, un evento biofisico raro come «l'evoluzione della specificità al cortisolo di un recettore ai glucocorticoidi ancestrali». Ulteriori esempi possono essere trovati anche negli approcci più classici di modellizzazione, come quelli che si riferiscono al fatto che «la sopravvivenza delle specie emerge a partire da eventi rari di migrazioni individuali» (Zelnik, Solomon, Yaari, 2015), di cui si è già parlato.

La differenza decisiva tra gli approcci fisici sulle fluttuazioni importanti e sugli eventi rari e l'analisi biologica sugli eventi rari e sul loro ruolo può essere così riassunta:

> Nelle poche teorie fisiche in cui gli eventi rari sono analizzati, e non relegati a margine di una gaussiana e dimenticati, le dinamiche fisiche influenzate in modo pertinente da eventi rari sono considerate come rare. In biologia, al contrario, tutte le traiettorie evolutive sono influenzate, addirittura scandite nei loro tempi storici, dagli eventi rari.

Si noti che questi eventi biologici sono rari per quanto riguarda la loro specificità biologica, vale a dire, la loro storicità; ogni evento è *individualmente* raro, quand'anche eventi di *questo tipo* si producano costantemente nel corso dell'evoluzione e contribuiscano alla costruzione di *tutti* i cammini evolutivi. Si tratta del risultato della produzione della variazione e della diversità dunque di uno degli invarianti fondamentali delle dinamiche biologiche: ciò che hanno in comune, il loro "tipo", non è una struttura coerente predeterminabile, ma il fatto di essere rari.

5.10 Conclusione

Questo tentativo di comprensione scientifica di un componente possibile dell'innovazione evolutiva e della "creatività" biologica e cognitiva si ispira alla metodologia matematica in fisica, laddove la nozione di creatività non ha senso. Essa è al massimo un cattivo nome per l'aleatorio e l'imprevedibilità, presenti nelle strutture di coerenza autorganizzate o che si formano nelle transizioni critiche, sebbene abbiano senso nella descrizione delle dinamiche dei sistemi biologici. In questi sistemi si è cercato di comprendere la novità come la costruzione continua di nuovi spazi delle fasi sulla base delle tracce di eventi passati, spesso rari e sempre reinterpretati.

La radicalità della novità biologica non risiederà quindi nella sua improbabilità, ma, molto più profondamente, nell'impossibilità di attribuirle delle probabilità.

Il fine di quest'analisi è contribuire alla costruzione di un quadro scientifico rigoroso, in particolare unificando l'ontogenesi e la filogenesi (Longo *et al.*, 2015; Soto, Longo, 2016b), in continuità con gli sforzi dei due libri scritti rispettivamente con Bailly e Montévil. Il trasferimento metodologico "revisionista" proposto qui e nei libri appena citati, oltre la matematica e la fisica verso la biologia, è un tentativo di oggettivizzare un'intuizione comune: il ruolo congiunto dell'ereditarietà e della produzione di diversità nell'evoluzione (e nello sviluppo) in quanto principio di non-conservazione dei fenotipi – per dirla con Darwin, l'ereditarietà è una «discendenza con modificazioni». Questo oltrepassa i princìpi di conservazione (dell'energia, della quantità di moto ecc.), delle simmetrie nelle equazioni in fisica e dell'aleatorio nelle teorie dell'inerte, delle rotture di simmetria in uno spazio pre-dato (Longo, Montévil, 2017). Ciò che si propone è compatibile con queste teorie, ma le intende con nuovi princìpi, che trattano nuovi osservabili: i fenotipi e gli organismi.

Le costruzioni teoriche devono essere basate sugli attriti con "il reale" che canalizza ogni sforzo verso la conoscenza. Le osservazioni, gli esperimenti e le azioni sulla natura forniscono tali attriti e canalizzazioni, una pratica di conoscenza aperta da Galilei e Darwin. Il trasferimento di teorie e tecniche della fisica (matematica) in quanto tali verso la biologia è un approccio idealista, che si fonda su conoscenze costruite in quadri concettuali pre-dati e, in seguito, sul trasferimento di presunte "idee pure" che apparterrebbero a un dominio platonico assoluto; una pratica comune ma implicita che R. Thom ha spiegato con grande coerenza. Ora, queste idee e strutture matematiche sono state concepite nel corso di storie concettuali specifiche, nel dialogo molto fecondo tra fisica e matematica, anzi nell'autonomia autogenerativa della matematica; non sono il prodotto di indagini concrete sui sistemi biologici, che hanno la loro fenomenalità propria e i propri dati empirici. L'unificazione è un fine difficile che viene dopo, come sanno benissimo i fisici da Newton a tutti coloro che lavorano al fine di interfacciare fisica quantistica e relatività, passando per Boltzmann, avendo tutte queste ricerche avuto all'origine da nuove branche della matematica.

Qui si è fatta semplicemente l'ipotesi esplicita – e si spera corretta – per cui in biologia la costruzione dell'oggettività scientifica potrebbe approssimativamente seguire la feconda metodologia della fisica, sebbene la si debba considerare a partire da un nuovo oggetto di conoscenza e senza, tuttavia, operare un trasferimento astratto di teorie e tecniche. Si è pertanto conferito un ruolo centrale alle nozioni derivate di invarianze matematiche e alle loro trasformazioni, con l'obiettivo di adattare questo metodo alla storicità e alla variabilità dei sistemi biologici. Si è così sviluppata una visione interdisciplinare in cui l'importanza della storia, dei contesti relazionali e dei cambiamenti è al cuore di tutte le analisi. Il filo conduttore, comune alle differenti parti di questa riflessione preliminare, si basa sul ruolo della ricostruzione dinamica delle tracce del passato nella comprensione del presente e nella formazione del futuro dei differenti sistemi biologici, che si tratti di evoluzione o di cognizione. La descrizione di questo fenomeno, all'interno di un dominio, aiuta la comprensione nell'altro, partecipando alla costruzione di quadri concettuali differenti, ma analoghi. È possibile anche applicare il trasferimento di questo metodo ad altre scienze storiche, come è stato fatto in economia, per quanto riguarda il cambiamento degli spazi delle fasi (Felin *et al.*, 2014; Koppl *et al.*, 2015).

Gli abusi concettuali in queste analisi incrociate, dalla fisica alla biologia e alle scienze cognitive, sono certamente numerosi. Ciononostante, l'approccio comune, ammettendo che sia solo moderatamente corretto, può fornire la base per migliori ricerche in ogni disciplina storica. È bene tenere a mente che qui si è trasferito anche un *risultato negativo*, vale a dire l'analisi di una forma di imprevedibilità, basata sull'importanza del passato e sulla problematicità della misura, che è una posizione duale se comparata ai trasferimenti illeciti e positivisti degli strumenti matematici dalla fisica alla biologia o, allo stesso modo, alle scienze umane e storiche – come è successo frequentemente in economia. Più precisamente, questa prospettiva implica una critica radicale di questi princìpi che sono utilizzati nelle analisi cosiddette scientifiche delle dinamiche sociali e storiche dell'umanità, come la teoria dell'equilibrio matematico che predomina costantemente in economia, benché sia totalmente inadeguata per quest'oggetto di studio – sia sufficiente osservare che già è inadeguata per alcuni sistemi fisici leggermente complessi, che sono normalmente lontani dall'equilibrio. In effetti, gli argomenti esposti riguardo la storicità in biologia valgono *a fortiori* per l'analisi delle società e della storia umana, in cui il legame tra memoria e azione e il ruolo degli eventi rari (i "cigni neri" della borsa, ad esempio) sono allo stesso modo cruciali. Se tutto ciò è corretto, lo stesso studio di queste forme di imprevedibilità dello spazio dei possibili può contribuire a una comprensione dell'innovazione evolutiva come pure umana. Questo è ampiamente fondato su un'analisi del riuso e della reinterpretazione, anzi delle trasformazioni, dipendenti dal contesto, di tracce del passato relativamente invarianti, gli invarianti storicizzati.

Ringraziamenti

Claus Halberg e i rilettori della versione inglese di questo articolo mi hanno aiutato con molti commenti pertinenti e costruttivi.

6

Possibilità e realtà tra fisica e biologia

di *Angelo Marinucci*

6.1
Introduzione

In questo capitolo s'intende sviluppare da un punto di vista filosofico una questione posta all'interno degli studi sulla complessità, ma che investe anche altri domini della scienza. Si tratta del problema di pensare "possibilità al di là della determinazione". In questa prospettiva, si prenderanno le mosse da alcune osservazioni di Heisenberg sulla necessità di differenziare i concetti di *possibilità* e *realtà* in fisica classica e meccanica quantistica, poiché in quest'ultima risulta alquanto complicato usarli nella forma in cui si presentano nella prima. L'esigenza posta concerne un concetto di possibilità completamente svincolato da quello di realtà, laddove si vogliano evitare confusioni teoriche, dovute all'uso di "possibilità" e "realtà" nei due ambiti della fisica. Uno degli obiettivi polemici di Heisenberg è, come si vedrà, la tradizione moderna che arriva sino ad Einstein per cui a ogni elemento teorico corrisponde un elemento nella realtà (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935). Oltre che in fisica, si discuterà di questo stesso problema anche in biologia, in quanto quest'ultima pone la necessità filosofica di ulteriori chiarimenti concettuali, dovuti a problemi epistemologici nuovi e strettamente biologici.

In questo capitolo, oltre a recuperare spunti offerti dagli altri contributi al volume, si farà quasi esclusivo riferimento a testi scientifici, in modo da dare un taglio diverso alla trattazione di "possibilità" e "realtà".

In maniera del tutto introduttiva, per «possibilità al di là della determinazione» si intendono tutti quegli stati di un sistema fisico o biologico che non sono riducibili alla semplice somma o combinazione degli elementi di realtà che costituiscono il sistema stesso. In altri termini, il punto centrale è capire se, dato un determinato spazio delle fasi (classico, quantistico o biologico), è sempre possibile determinare *a priori* i possibili *e se* questi sono riducibili agli elementi di realtà che caratterizzano il sistema in questione. Com'è facile intuire, ci si troverà certamente davanti a forme di indeterminazione che però possono avere statuti diversi, a seconda della maniera in cui è costruita la teoria. In tal senso, si sottolineeranno alcune profonde differenze teoriche che separano *fisica classica*, *meccanica quantistica* e *biologia*, in quanto pensano e descrivono i propri oggetti in modo diverso.

Si cercherà di sostenere, senza presunzione di completezza, che se il dominio della fisica classica è la *realtà*, quello della meccanica quantistica è la *possibilità*, in quanto il passaggio dalla coerenza quantistica alla decoerenza può essere pensato, anche sulla scorta delle osservazioni di Heisenberg, come il passaggio dalla possibilità alla realtà. In tal senso, è necessario un concetto di possibilità che sia ben separato e distinguibile da quello di realtà. In via del tutto preliminare, se è quanto meno lecito pensare il possibile, almeno in fisica classica, come ciò che è volto verso la sua realizzazione, in quanto tutti gli stati *possibili* di un sistema classico sono *passibili* di realizzarsi, tale caratterizzazione risulta inadeguata in meccanica quantistica. Qui, infatti, esistono possibilità che *non sono passibili* di entrare nel dominio della realtà: si pensi ad esempio al gatto di Schrödinger che può essere "vivo *e* morto".

Per quanto riguarda la biologia, si evidenzierà che il suo dominio è quello della *possibilità*, ma in un senso diverso da quello della fisica dei quanti perché, a differenza di quest'ultima (così come della fisica in generale), la lista dei possibili *non* è data *a priori*; di conseguenza, la biologia non ha solo il problema di determinare il passaggio dal possibile al reale, ma anche quello della costituzione del possibile.

Prima di commentare a scopo introduttivo un passo di Heisenberg, è necessario spiegare, sia pur brevemente, come devono essere intesi i termini "possibilità" e "realtà", nella maggior parte degli usi che se ne faranno.

Un oggetto può essere studiato in modo da determinare *che cosa* esso sia, definendone le proprietà ecc., ma dev'essere preliminarmente stabilita *la maniera in cui* (il *come*) esso è posto per la conoscenza (Tagliagambe, 1991, p. 212). I due casi estremi sono dati dalla fisica classica e dalla biologia. Nella prima, si determina ciò che l'oggetto è in quanto oggetto reale, stabilendone le configurazioni possibili in uno spazio delle fasi pertinente che riflette le varie possibilità reali. In biologia, non è possibile costruire uno spazio delle fasi che contenga tutte le possibili configurazioni di un sistema, in quanto l'*hopeful monster*, vale a dire l'apparizione di un tratto fenotipico nuovo, è un possibile del tutto indeterminabile *a priori*. In questo caso, visto che la lista dei possibili sarà irrimediabilmente incompleta, l'oggetto *hopeful monster* sarà trattato dal punto di vista della *costituzione del possibile* e non del reale, in quanto è noto solo *a posteriori*. A questo punto, come si vedrà, si hanno due opzioni fondamentali: o si cerca di ridurre la variazione a elementi di *realtà* o la si tratta in quanto tale[1], cioè come *possibile*, *pensabile* e *indeterminabile*, esterna al dominio della realtà.

Detto ciò, è necessario procedere con ordine e porre il problema della relazione tra possibilità e realtà nell'ottica di pensare le «possibilità al di là della determinazione», attraverso la preannunciata citazione di Heisenberg.

In *Fisica e filosofia*, si legge:

> Noi oggettiviamo un'affermazione se pretendiamo che il suo contenuto non dipenda dalla condizione sotto la quale essa può essere verificata. Il realismo pratico sostiene che ci sono delle affermazioni che possono essere oggettivate e che in effetti la massima parte della nostra esperienza della vita d'ogni giorno consiste di tali affermazioni. Il realismo dogmatico pretende che non ci siano asserzioni riguardanti il mondo materiale che non possano essere oggettivate [...]; in realtà la posizione della fisica classica è quella del realismo dogmatico. [...] Specialmente in fisica [classica], il fatto che noi possiamo spiegare la natura per mezzo di semplici leggi matematiche ci dice che abbiamo a che fare con caratteri genuini di realtà, e non con qualche cosa che abbiamo – in qualsiasi significato del termine – inventato noi stessi. [...] Ma proprio la teoria dei quanti è un esempio della possibilità di spiegare la natura per mezzo di semplici leggi matematiche senza dover poggiare su quella base. [...] La scienza naturale è in effetti possibile senza la base del realismo dogmatico (Heisenberg, 2003, pp. 100-1[2]).

Le parole di Heisenberg nascondono una profonda esigenza di rivedere la maniera in cui si struttura la relazione tra *matematica* e *natura* che, in questa sede, non è possibile accompagnare in tutte le sue sfaccettature, anche se è possibile evidenziare alcuni elementi essenziali per i fini di questo testo. Se in fisica classica tutti gli stati *possibili* di un sistema sono *passibili* di entrare nel dominio della realtà, in meccanica quantistica questo non avviene perché, mentre la fisica classica descrive *direttamente* il suo oggetto, quest'ultima vi si riferisce solo *indirettamente*. Volendo riassumere l'opposizione posta tra fisica classica e quantistica si potrebbe dire che, nel primo caso, ciò che si calcola è ciò che si misura, mentre, nel secondo, ciò che si calcola

1. Nella parte dedicata alla biologia, si vedrà che nel primo caso si cerca di costruire la biologia sull'esempio della fisica classica (Monod, 1989; Perutz, 2007), nel secondo si cerca uno spazio teorico proprio della biologia, diverso da quello fisico, senza che i due siano in contraddizione (Bailly, Longo, 2006).

2. In queste stesse pagine Heisenberg distingue anche un "realismo metafisico", sostenendo che esso «compie ancora un passo al di là del realismo dogmatico affermando che le cose esistono realmente».

non è ciò che si misura (Bailly, Longo, 2006)[3]. In effetti, se si considera il gatto di Schrödinger, dalla linearità di Ψ che ne descrive lo stato si deriva che, se A e B sono delle soluzioni, allora anche $A + B$ è una soluzione. Si avrà, pertanto, che il gatto può essere contemporaneamente vivo *e* morto: questa è una delle possibilità, o "stato potenziale" (Heisenberg, 2003), che si calcola, ma che non è passibile di entrare nella realtà. Le possibilità "reali", quelle che per usare le parole di Einstein hanno un correlato reale (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935), sono solo che il gatto sia vivo o morto. Di qui, derivano le problematiche e le opzioni teoriche relative al passaggio da gatto "vivo *vel* morto" a "vivo *aut* morto". Per ora, non è necessario entrare in queste discussioni (Ghirardi, 2009; Omnés, 1994), bisogna al contrario soffermarsi sul fatto che Heisenberg cominci a porre il problema di separare la possibilità dalla realtà e, conseguentemente, di ridefinire meglio i domini e le domande cui rispondono fisica classica e meccanica quantistica. Per chiarezza espositiva e per le necessità imposte dalla fisica dei quanti, si può definire "possibile" tutto ciò che si calcola e che deriva dalla teoria, al di là del fatto che sia o meno passibile di entrare nella "realtà". Si può, inoltre, definire "realtà potenziale" (o possibile) ciò che è passibile di entrare nella "realtà effettiva" definita a sua volta come *hic et nunc*, come ciò che si misura. A partire da questa caratterizzazione, si mostrerà che le "possibilità" della fisica classica possono essere pensate come realtà potenziali o possibili; in tal modo si elimina ogni tipo di ambiguità nell'uso di questi concetti e si stabilisce, contemporaneamente, uno spazio filosofico ben definito per la possibilità e per l'uso di uno stesso linguaggio per fisica classica e quantistica. In altri termini, se si associa la nozione di "possibilità" alla meccanica quantistica, in cui si ha "gatto vivo *vel* morto", allora bisogna associare le possibilità della fisica classica alla "realtà possibile" o potenziale. Ovviamente, le ragioni di questa scelta saranno esposte nel prosieguo del capitolo, tuttavia esse si radicano, in buona parte, nella diversità degli oggetti che i due tipi di "possibilità", quella classica (realtà potenziale) e quella quantistica, contengono[4].

3. L'esigenza di Heisenberg di abbandonare il realismo dogmatico e la sintesi/risposta di Bailly e Longo (2006) combattono contro una *forma mentis* che ha radici profonde nella scienza moderna. Sia sufficiente ricordare che, intorno al 1750, era molto acceso il dibattito, soprattutto tra Buffon e Clairaut, sulla necessità o meno che ogni membro di un'espressione matematica dovesse avere un corrispettivo elemento nella realtà (Waff, 1976).

4. A ciò si aggiungono le differenze che derivano dal fatto che si tratta di due teorie costruite in maniera diversa e che non solo interrogano la realtà in modo diverso, ma che ricevono risposte tra loro contraddittorie.

A questo riguardo, la prima frase della citazione («Noi oggettiviamo un'affermazione se pretendiamo che il suo contenuto non dipenda dalla condizione sotto la quale essa può essere verificata») veicola un altro elemento estremamente interessante. Provando a interpretare quest'affermazione e, allo stesso tempo, tentando di andare oltre, si può sostenere che fisica classica e meccanica quantistica descrivano in modo differente la realtà (Rovelli, 1996). Come si diceva, se la prima se ne occupa *direttamente*, la seconda lo fa *indirettamente*, in quanto se un'equazione in fisica classica determina la dinamica di un fenomeno e, pertanto, descrive direttamente i suoi stati, in meccanica quantistica l'equazione di Schrödinger descrive l'evoluzione di probabilità riferita a stati e non all'oggetto in sé; in altri termini, non si occupa dell'oggetto, ma della probabilità che l'oggetto sia in un determinato stato o in un altro. Se Rovelli (1996; 2010) afferma, giustamente, che la meccanica quantistica si occupa di *come* i sistemi interagiscono, si può affermare che la fisica classica, al contrario, risponde alla domanda «che cos'è l'oggetto?», lo definisce per poi studiare "come è". Tutto ciò implica una distanza filosofica e anche teorico-matematica finora incolmabile, ma che tuttavia offre moltissimi spunti di riflessione.

In biologia, la questione si fa ancora più complessa, in quanto non è mai nota *a priori* la lista completa dei fenotipi *possibili*. Benché in fisica quantistica il gatto "vivo *vel* morto" costituisca un problema, tuttavia non si danno altre possibilità al di là di quelle che si calcolano. In biologia, al contrario, è *impossibile* prevedere una qualsiasi variazione, per esempio, nella riproduzione. Se si vuole, il vero problema posto dalla variazione biologica è ancora più profondo e radicale di quello della meccanica quantistica, che riguarda l'"emancipazione" del concetto di possibile da quello di reale; in biologia la questione riguarda direttamente la stessa *costituzione* del possibile.

Ciò premesso, è giunto il momento di esporre in maniera chiara e ordinata quanto detto sinora, per giungere, al di là della fisica, alla biologia.

6.2
Fisica classica

La relazione tra possibilità e realtà così come la questione delle "possibilità al di là della determinazione" sono problematiche che si incontrano sempre nella fisica classica, ma spesso non sono poste in maniera esplicita nelle opere degli scienziati, perché in molti casi il loro pensiero poggia su presupposti di realismo, riduzionismo ecc. non sempre palesi. Per questo motivo, è necessario seguire, per quanto possibile, il percorso storico della fisica classica, concentrando l'attenzione su quei momenti in cui i temi in questione vengono discussi o si presentano in modo particolarmente interessante.

Per questioni di spazio, l'analisi sarà limitata alla fisica moderna posteriore a Newton; ci si soffermerà, quindi, sulla fisica dominata dal calcolo, inteso come "analisi algebrica" (Fraser, 1989), che dai primi anni del Settecento giunge fino alla fondazione del calcolo nella seconda metà dell'Ottocento (Blay, 1992; Bottazzini, 1981; Boyer, 2007). Oltre a ciò, si concentrerà l'attenzione sull'introduzione, da parte di Poincaré, di una forma di indeterminazione all'interno del quadro della fisica classica, cercando di chiarirne lo statuto per stabilire se si possa parlare o meno di "possibilità al di là della determinazione".

6.2.1. PRIMA DI POINCARÉ...

Il lavoro di Poincaré cui si sta facendo riferimento è quello sul problema dei tre corpi (Poincaré, 1890) sul quale in verità aveva cominciato già a lavorare Newton quasi due secoli prima. La questione si rivela estremamente interessante se si pensa che sin dall'inizio Settecento esistevano problemi *fisici* e strumenti *matematici* che danno luogo a ciò che oggi si chiama "caos deterministico". Tuttavia, solo alla fine dell'Ottocento Poincaré ha posto le basi della teoria del caos. Ciò significa che le ragioni di questo ritardo non vanno solo ricondotte a questioni matematiche o scientifiche, ma soprattutto a questioni *filosofiche* (Marinucci, 2011). Infatti, non si può certo sostenere che a scienziati del calibro di Euler, Lagrange ecc. mancassero le conoscenze matematiche per affrontare in modo diverso il problema dei tre corpi, il limite consisteva proprio nella maniera di interpretare la natura. Esso è generalmente presente nel periodo dell'"analisi algebrica" e si caratterizza per il fatto di ritenere che la matematica *sia* il linguaggio della natura e non semplicemente uno strumento che gli scienziati usano per studiarne i fenomeni. In altri termini, il calcolo non era un linguaggio dell'uomo, ma apparteneva alla natura. Inoltre, se si riduce, cartesianamente, lo studio della natura alla determinazione di materia e movimento, e se si considera che le equazioni differenziali si occupano proprio di quest'ultimo, allora sembrerebbe davvero possibile scoprire tutti i segreti della natura[5].

5. Detto in breve, al famoso passo del *Saggiatore* cui si fa implicitamente riferimento, la fisica moderna posteriore a Newton sostituisce alla geometria il calcolo.

Il rapporto tra matematica e natura all'interno dell'analisi algebrica è ben esposto praticamente in tutti i testi dei maggiori scienziati dell'epoca in questione:

Abbiamo già vari trattati di meccanica, ma il piano di questo è interamente nuovo. Io intendo ridurre la teoria di questa scienza, e l'arte di risolvere i problemi relativi ad essa, a formule generali, il semplice sviluppo delle quali fornisca tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ciascun problema. Spero che la maniera in cui ho cercato di raggiungere quest'obiettivo non lasci nulla a desiderare. [...]. In quest'opera non si troverà nessuna figura [*figures*]. I metodi che vi espongo non richiedono né costruzioni né ragionamenti geometrici o meccanici, ma soltanto delle operazioni algebriche, sottoposte ad un procedimento regolare e uniforme. Coloro che amano l'analisi, vedranno con piacere che la meccanica ne è diventata una branca [*branche*], e mi saranno grati di averne così esteso il dominio (Lagrange, 1788, p. VI)[6].

Lo studio profondo della natura è la fonte più fertile delle scoperte matematiche. Questo studio non ha solo il vantaggio, presentando un oggetto ben determinato d'indagine, di escludere questioni vaghe e calcoli senza scopo; esso è inoltre un metodo sicuro per costituire l'analisi stessa e per scoprire elementi che c'interessa conoscere e che le scienze naturali devono sempre preservare: questi sono gli elementi fondamentali che si ripresentano in tutti i fenomeni naturali (Fourier, 1888, pp. XXII-XXIII).

Questi sono solo due chiari esempi di come si strutturava la relazione tra natura, problemi fisici e calcolo, ma risultano particolarmente interessanti perché si tratta di due testi che rappresentano alcuni punti più alti della scienza del tempo. In particolare, la *Meccanica analitica* di Lagrange è il punto d'arrivo del percorso che inizia ai primi del Settecento e che si caratterizza per la traduzione della geometria dei *Principia* nel linguaggio del calcolo, integrando tutte le novità della fisica del tempo (Blay, 1992). Il passo in cui Lagrange afferma che la «meccanica [è] diventata una branca (*branche*)» dell'analisi mostra chiaramente il tentativo di riduzione della meccanica al calcolo (Fraser, 1987; 1989). Il fatto che Fourier sostenga che è possibile escludere "questioni vaghe e calcoli senza scopo" sottende e sottolinea la commistione tra proprietà fisiche e soluzioni di equazioni

6. Per sottolineare ancor di più la forza e l'importanza delle parole di Lagrange, è necessario citare un passo di Newton, cui con molta probabilità lo scienziato si riferisce: «La *geometria* dunque si fonda sulla prassi della meccanica, e non è nient'altro che quella parte della *meccanica universale* che propone e dimostra l'arte di misurare accuratissimamente» (Newton, 2008, p. 58). Su questi temi cfr. Bottazzini (1989) e Marinucci (2012).

matematiche. In altri termini, era lecito usare proprietà ed elementi *fisici* all'interno della risoluzione matematica di equazioni differenziali (Marinucci, 2011). Prova ne è il fatto che, se si esclude Cauchy, non venivano posti problemi di esistenza di soluzioni di equazioni differenziali, anzi, laddove si incontravano difficoltà, si faceva sempre affidamento agli sviluppi del calcolo. È particolarmente significativo che Euler e Lagrange si esprimessero proprio in questi termini nelle loro memorie sul problema dei tre corpi (Euler, 1960a, 1960b; Lagrange, 1884a), senza prendere in considerazione la possibilità dell'inesistenza di soluzioni. Di nuovo, si ripresentano problemi legati alla visione filosofica della natura (Wilson, 1995c). Il fatto di considerare il calcolo l'essenza della natura ha ritardato, più in generale, l'esigenza di *fondazione* del calcolo. Del resto, i risultati scientifici ottenuti erano talmente importanti che spinsero gli scienziati dell'epoca a considerare il calcolo, uno strumento di conoscenza, come l'essenza della natura.

Dai testi di Lagrange, Fourier, Laplace ecc. si desume pertanto l'idea che, dal punto di vista matematico, al fine di ottenere i risultati cercati, sia sufficiente e necessaria la sola *formalizzazione*, quanto più accurata possibile, in quanto la *correttezza* dei procedimenti *matematici*, accompagnata dalla *certezza fisica* dei risultati matematici, era in questo quadro concettuale sinonimo di verità (Laplace, 1967a; Marinucci, 2011).

La riduzione dei problemi fisici al calcolo (Lagrange, 1788; 1884b) e il conseguente uso, oggi impossibile, di proprietà fisiche nella risoluzione di problemi matematici (Fourier, 1888) è tipico dell'"analisi algebrica" e si manifesta in maniera particolarmente evidente nel modo in cui era usato lo strumento della "linearizzazione". Esso *non* era considerato come qualcosa che permettesse di lavorare con certe equazioni differenziali, ma era considerato come *l'elemento* in grado di individuare la causa o le cause responsabili di un determinato fenomeno, in conformità al principio, anch'esso superato da Poincaré, per cui esiste una proporzionalità diretta tra cause ed effetti. Nel caso del problema dei tre corpi, ma questo discorso vale in generale, non si riteneva possibile che piccole perturbazioni potessero avere effetti paragonabili a quelli delle cosiddette "cause essenziali". Di nuovo, si è davanti a un assunto filosofico, che ha avuto un'influenza enorme sulla maniera di fare scienza. Da questa prospettiva, Laplace afferma:

> Il più delle volte i fenomeni della natura sono complicati da cause estranee: un numero enorme di cause perturbatrici vi mescolano la loro influenza, tanto che è ben difficile riconoscerli. Per giungervi bisogna moltiplicare le osservazioni o gli esperimenti, affinché, venendosi a distruggere mutualmente gli effetti estranei, i

risultati medi mettano in evidenza i fenomeni ed i loro vari elementi (Laplace, 1967a, pp. 298-9).

Se l'effetto delle perturbazioni è destinato a scomparire, allora si mantiene sempre una proporzionalità tra cause ed effetti, chiudendo così ogni porta alla "sensibilità alle condizioni iniziali". In altri termini, quando si scriveva un sistema non lineare H come $H = H_0 + \varepsilon H_1$, dove H_0 è la parte integrabile, H_1 è la parte non integrabile ed ε è il parametro di perturbazione, si riteneva che al variare di ε la perturbazione non fosse in grado di produrre effetti macroscopici sulla dinamica. Al contrario, dopo Poincaré, al variare di quest'ultimo bisogna studiare il sistema in maniera completamente diversa (Tabor, 1989, pp. 89-186; Diacu, Holmes, 1996).

A partire da quanto detto, nel periodo considerato, si instaura una doppia implicazione tra *determinismo* e *prevedibilità* per la quale, se è possibile prevedere completamente gli stati di un sistema, allora quest'ultimo è deterministico e, se un sistema è deterministico, allora se ne possono prevedere tutti gli stati. Ne deriva che *non* esistono possibilità al di là della determinazione.

I motivi filosofici, che sono alla base di tale concezione, pongono direttamente la questione del rapporto tra possibilità e realtà, perché vincolano la possibilità *all'interno* della determinazione, vale a dire, all'interno degli elementi di realtà che costituiscono un sistema fisico. È legittimo esprimersi in questo modo in quanto, in aggiunta a quanto si è detto sul rapporto tra calcolo e natura, per ogni espressione matematica era auspicato, e spesso necessario, che ogni termine di un'equazione corrispondesse a un elemento di realtà; prova ne è la polemica tra Clairaut e Buffon verso la metà del Settecento (Waff, 1976; 1995)[7].

In forma del tutto generale, si può affermare che all'interno di un quadro riduzionistico e deterministico, attraverso le equazioni differenziali ci si occupa *direttamente* della realtà; anzi, il dominio della fisica risulta essere proprio quello della realtà. Tra le equazioni e il fenomeno descritto la fisica classica instaura una relazione diretta, per cui tutto ciò che si calcola è ciò che si misura e, pertanto, tutto ciò che è possibile è *passibile* di entrare nella realtà; si tratta, quindi, di *realtà* possibili.

7. Tentando di migliorare la legge di attrazione newtoniana, Clairaut aveva proposto di aggiungere $\frac{1}{r^4}$ a $\frac{1}{r^2}$ per le relativamente brevi distanze, proponendo così una legge "multitermine". Senza entrare nei dettagli, la critica di Buffon era centrata sul fatto che di $\frac{1}{r^4}$ non si forniva un corrispettivo reale.

In forma più rigorosa, si può affermare che, all'interno dell'analisi algebrica, la soluzione (o integrale) generale contiene tutte le traiettorie "possibili" di un determinato fenomeno che, in verità, si pongono nel dominio del *reale*, in quanto sono tutte passibili di realtà effettiva; saranno poi le condizioni del fenomeno studiato a determinare l'integrale particolare. Perché ciò sia possibile, è necessario stabilire fino a che punto *non* esista alcuna soluzione di continuità tra natura e matematica. Se tra natura, fisica e matematica non c'è soluzione di continuità, allora le possibilità teoriche sono direttamente derivate dalle condizioni fisiche reali del fenomeno.

Al di là del lato storico, si deve ricordare che le soluzioni matematiche non descrivono traiettorie "possibili", date certe condizioni, ma *necessarie*. Di conseguenza, a parità di fenomeno, date condizioni al contorno diverse, si avranno sempre traiettorie differenti, ma tutte necessarie.

Com'è facile intuire, la possibilità si trova appiattita sulla realtà, in quanto tutte le possibilità sono passibili di entrare nella realtà.

6.2.2. ...DOPO POINCARÉ

È ragionevole affermare che storicamente la questione delle «possibilità al di là della determinazione» si ponga, almeno in ambito scientifico, nel momento in cui Poincaré rompe la già menzionata doppia implicazione tra determinismo e prevedibilità tipica della scienza moderna posteriore a Newton.

Se si può affermare, per le ragioni mostrate, che fino a Poincaré le possibilità possono essere considerate *interne* alla determinazione e pensate come *realtà possibili*; per *poter* parlare di possibilità *al di là* della determinazione è necessario introdurre una qualche forma di indeterminazione, per poi chiaramente appurarne lo statuto. È proprio a questo punto che il già ricordato studio di Poincaré sul problema dei tre corpi può essere considerato un vero e proprio spartiacque (Barrow-Green, 1997)[8]: è a partire dal suo "risultato negativo" che prende le mosse la teoria del caos, in cui si assiste, da un punto di vista storico-matematico, alla reintroduzione di strumenti geometrici che, come mostra la citazione di Lagrange, erano stati lasciati decisamente in secondo piano.

8. Ovviamente, i lavori di Poincaré andrebbero discussi all'interno del clima culturale di fine Ottocento, nel quale esiste un dibattito estremamente interessante sul rapporto tra matematica, fisica e natura, ma non è possibile trattarlo in questa sede. Sono, a questo proposito, particolarmente interessanti le riflessioni di Boltzmann.

Come si diceva, le equazioni della fisica classica descrivono un grave che cade così come l'orbita di un pianeta in maniera *diretta*. In altri termini, dal punto di vista teorico, ciò che si calcola è ciò che si misura. Questo è evidente nei casi *lineari*, ma è applicabile anche a quelli *non-lineari* non integrabili, nonostante si abbia a che fare con un'indeterminazione. La spiegazione risiede proprio nel chiarimento del tipo di indeterminazione con cui si ha a che fare. Essa, in generale, si presenta e resta sempre, com'è noto, in un quadro *teorico* deterministico. In altri termini, le traiettorie determinabili sono e restano sempre delle geodetiche, vale a dire dei percorsi *necessari*. Anche nel caso di un torrente di montagna, il percorso che l'acqua segue, con i suoi salti e i suoi rallentamenti, è un'ottimizzazione delle forze in campo (soprattutto in una formulazione hamiltoniana) e, pertanto, l'acqua seguirà sempre una geodetica, anche se il suo cammino appare completamente casuale.

All'interno di questo quadro generale, Poincaré scopre che le soluzioni del problema dei tre corpi sono *globalmente instabili*[9]. In questi casi non funziona nemmeno il metodo dell'espansione in serie di funzioni, in quanto all'aumentare dei termini non ci si avvicina a una soluzione esatta poiché la serie diverge (Barrow-Green, 1997; Tabor, 1989). È degno di nota che fino a Poincaré questo strumento fosse usato presupponendo di fatto che le serie convergessero asintoticamente e che, quindi, fosse comunque possibile arrivare a una soluzione[10]. In altri termini, quando si intende descrivere un fenomeno non si riescono mai a misurare con precisione assoluta le sue condizioni: di conseguenza, lo stesso accesso alla misura è talmente problematico che un piccolo errore, minore di un ε liberamente scelto, può produrre una divergenza esponenziale tra una traiettoria calcolata e un'altra le cui condizioni variano di un valore minore di ε. Riprendendo e ribaltando la citazione di Laplace, si può affermare che gli effetti delle perturbazioni non vengono di necessità a "distruggersi mutualmente".

In tal senso, si ha a che fare con un'indeterminazione *epistemica*, provocata dalla sensibilità alle condizioni iniziali, in quanto si tratta, da un punto di vista matematico, di un problema di accesso alla misura. Infatti, date le condizioni iniziali, ogni traiettoria è determinata attraverso le equa-

9. È degno di nota che, proprio lavorando sul problema dei tre corpi, Lagrange trovò delle soluzioni locali stabili, note appunto come "equilibri di Lagrange".

10. Il curatore delle *Œvres de Fourier*, nell'edizione del 1888, sottolinea le sue riserve sul rigore dello scienziato francese, affermando che «il metodo [di Fourier] consiste nell'esprimere con un integrale definito la somma dei primi termini della serie, e poi di cercare il limite di questo integrale» (Fourier, 1888, p. 158).

zioni; è la divergenza esponenziale tra due o più traiettorie che non può essere determinata: c'è sempre un errore minore della misura che limita la prevedibilità.

È necessario ribadire che, *dal punto di vista della conoscenza*, si tratta sempre di traiettorie necessarie e non propriamente di traiettorie possibili. Inoltre, dal *punto di vista delle condizioni di esistenza dell'oggetto*, si può determinare il corrispettivo delle condizioni *reali* di esistenza dell'oggetto nella teoria che ci si dà. Nel caso non-lineare è possibile, pertanto, determinare l'insieme delle traiettorie *reali possibili*, anche se la sensibilità alle condizioni iniziali impedisce di prevedere quelle *effettive*. In generale, si può associare alla fisica classica la coppia *realtà-necessità*. Si può dunque riaffermare che la fisica classica, in generale, è immersa nel dominio della realtà. Di qui, ogni traiettoria è *un cammino "possibile" nel dominio della realtà*. In questo senso, la fisica classica tratta di una realtà potenziale, o meglio di un insieme di realtà potenziali, in un determinato spazio delle fasi. Infatti, se si considerano le traiettorie potenziali di un fenomeno nel loro spazio delle fasi, non si tratta propriamente di un insieme di possibili che possono diventare reali; si tratta di *realtà potenziali*, tutte passibili di diventare effettive.

Naturalmente, si può continuare a usare la coppia "possibile-reale" al posto di "realtà potenziale-realtà effettiva", ma si incappa in confusioni teoriche nel momento in cui si tratta di meccanica quantistica e di possibilità che *non sono passibili* di entrare nel dominio della realtà. Inoltre, se tutti i possibili sono passibili di realtà, allora la possibilità risulta davvero *appiattita* sulla realtà, in quanto è quest'ultima che detta le sue condizioni di esistenza: ciò che è possibile lo è in quanto può divenire reale e non perché la possibilità costituisca un dominio proprio, come si vedrà in meccanica quantistica e in biologia. D'altro canto, anche dal punto di vista filosofico ci si trova a piè pari nel dominio della realtà; il fatto che una fisica *deterministica* possa produrre solo traiettorie *necessarie* implica l'impossibilità di porsi nel dominio del possibile. Al contrario di quanto emergerà discutendo dell'emancipazione della possibilità dalla realtà in meccanica quantistica, anche dopo Poincaré la possibilità si trova appiattita sulla realtà, diventandone un duplicato, visto che non contiene alcun tratto caratteristico.

Come accennato nel paragrafo 6.1, il dominio del possibile contiene ciò che può *e* ciò che non può entrare nel dominio della realtà e, pertanto, dev'essere indipendente da quello della realtà. In altri termini, i due domini, quello della possibilità e quello della realtà, caratterizzano due diversi prospettive epistemologiche rispetto allo stesso oggetto. La differenza emergerà meglio parlando di meccanica quantistica e biologia, ma è degno di nota che in fisica classica praticamente coincidono. Se non c'è nessun salto tra calcolo e misura e se si ci si muove in un quadro deterministico, tutte le traiettorie sono necessarie, *reali* e, anche se non tutte *effettive*, saranno sempre passibili di esserlo. Dato che un'equazione differenziale contiene *a priori* la lista completa dei possibili in uno spazio delle fasi pertinente, la traiettoria effettiva sarà, per principio, inclusa tra quelle conoscibili.

L'obiezione ovvia che si può continuare a porre è che il risultato "negativo" di Poincaré introduce un'*indeterminazione* all'interno della fisica classica per cui, come detto, non tutti i sistemi deterministici sono prevedibili, come si pensava prima di Poincaré. Quest'obiezione potrebbe, in effetti, essere interpretata come una maniera per ripensare la relazione tra possibilità e realtà nella meccanica classica. È necessario, per questo motivo, ribadire di che tipo di indeterminazione si tratta. Essa ruota intorno al problema della *misura*, proprio della matematica del *continuo*, dominio in cui si muovono le equazioni differenziali. Dal punto di vista della descrizione teorico-matematica, l'equazione differenziale di un fenomeno descrive completamente il fenomeno cui si riferisce. Il fatto che un errore al di sotto della misura possa produrre la divergenza esponenziale delle traiettorie di un determinato intorno *non dipende da un limite teorico*, pertanto si ha un'indeterminazione *epistemica* e non epistemologica, vale a dire che essa *non* è intrinseca alla teoria. Come si diceva, le equazioni differenziali continuano a presupporre tutte le traiettorie dello spazio delle fasi; il problema riguarda la determinazione di quella effettiva. Di qui, il problema della misura non si pone tra "possibilità" (nel senso qui espresso) e realtà, ma tra realtà potenziale e realtà effettiva, oltre a essere *estrinseco* alla determinazione teorica.

6.3
La meccanica quantistica

Si è visto come in fisica classica si possa parlare solo di possibilità all'interno della determinazione: nonostante Poincaré introduca un'indeterminazione epistemica, essa non inficia il fatto che la costruzione teorica sia deterministica. L'opzione di poter considerare la "possibilità" come "realtà potenziale", oltre che sulle ragioni esposte, riposa sulle nuove problematiche poste dalla meccanica quantistica proprio sul dominio del possibile e risponde a esigenze filosofiche che si riferiscono alla maniera in cui la fisica dei quanti si occupa del proprio oggetto.

La frase di Heisenberg, citata nel paragrafo 6.1, pone appunto la questione di pensare *possibilità* che *non sono passibili* di entrare nel dominio della *realtà*. A differenza di quanto accade in fisica classica, in meccanica quantistica non tutti i possibili teorici hanno una controparte fisica reale[11], né è immediatamente evidente come avvenga il passaggio dalla realtà potenziale a quella effettiva. Prima di introdurre, sia pur sinteticamente, le ragioni *matematiche* che spiegano le possibilità di un sistema quantistico e l'irriducibile contingenza che caratterizza il passaggio dalla realtà potenziale a quella effettiva, è più che opportuno proporre l'esperimento mentale del "gatto di Schrödinger" in modo da facilitare l'esposizione.

Un gatto è posto all'interno di una camera d'acciaio assieme al seguente diabolico marchingegno: in un contatore Geiger c'è una piccola quantità di sostanza radioattiva, in modo tale che forse nell'intervallo di un'ora uno degli atomi decadrà, ma anche, con uguale probabilità nessuno subirà questo processo; [...] se questo accade il contatore genera una scarica e attraverso un relais libera un martello che frantuma un piccolo recipiente di vetro che contiene dell'acido prussico. Se l'intero sistema è rimasto isolato per un'ora, si può dire che il gatto è ancora vivo se nel frattempo nessun atomo ha subito un processo di decadimento. Il primo decadimento l'avrebbe avvelenato. La funzione d'onda del sistema completo esprimerà questo fatto per mezzo della combinazione lineare di due termini che si riferiscono al gatto vivo e al gatto morto, due situazioni mescolate o sfumate in parti uguali (Ghirardi, 2009, p. 331).

Le possibilità sono, come noto, che il gatto sia vivo, morto, e vivo *vel* morto. Quest'ultima può essere considerata come l'elemento che contraddice il "realismo dogmatico" criticato da Heisenberg. Come si accennava, essa non deriva da elementi fisici, ma dal fatto che l'equazione di Schrödinger sia lineare. Che «[Ψ] sia lineare implica che, se ψ_1 e ψ_2 sono due soluzioni, allora possiamo ottenere un'altra soluzione ψ combinandole linearmente: $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, dove c_1 e c_2 sono due costanti. Si dice che ψ rappresenta uno stato di sovrapposizione ψ_1 e ψ_2» (Guicciardini, Introzzi, 2007, p. 149).

Quest'ultimo rappresenta la possibilità che *non* è passibile di entrare nel dominio della realtà, ovvero: in meccanica quantistica ciò che si calcola *non* è ciò che si misura e, a ben vedere, il calcolo afferisce alla parte teorica,

11. In Einstein, Podolsky e Rosen (1935, p. 777) si afferma: «Ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica».

alle possibilità che la teoria produce, mentre la misura afferisce al dominio della realtà. Già questi elementi mostrano che si è davanti a uno spazio delle possibilità che non può essere ridotto né pensato a partire da quello della realtà[12]. La possibilità "gatto vivo *vel* morto", derivata da una proprietà matematica, va insieme alle altre a costituire la *totalità* delle possibilità di quel sistema. Come in fisica classica, anche in meccanica quantistica le possibilità sono completamente note *a priori*. Tuttavia, oltre che costituirsi almeno in parte in forma diversa, qui si pone anche il problema del passaggio dalla possibilità alla realtà potenziale, in quanto non è necessario che per ogni termine di un'equazione o per ogni soluzione debba esistere un correlato reale[13].

Probabilmente, solo adesso si intende pienamente perché si è sostenuto che il dominio della fisica classica fosse quello della realtà: infatti, l'indeterminazione "classica", laddove è presente, è dovuta al problema della "misura", che afferisce al dominio della realtà. Non si tratta di un'indeterminazione teorica, ma di un'indeterminazione dovuta all'accesso alle condizioni fisiche del sistema e al fatto che ci si trova nel continuo matematico. Al contrario, la possibilità quantistica del gatto "vivo *vel* morto" è una questione puramente matematica e teorica, svincolata da qualsiasi descrizione diretta dell'oggetto quantistico. A questo va aggiunta una riflessione sullo statuto dell'indeterminazione quantistica, in quanto è profondamente diversa da quella classica.

In fisica classica, la traiettoria di una palla di cannone è descritta da un'equazione, la cui soluzione rappresenta *immediatamente* la dinamica del suo oggetto. Quest'affermazione, apparentemente banale, ma che contiene molti taciti presupposti, permette di capire per opposizione cosa descrive la meccanica quantistica. Se, infatti, la prima riesce a determinare e descrivere direttamente il suo oggetto, la seconda lo descrive solo *indirettamente*.

12. È bene ricordare che Bell ha mostrato che non è possibile "completare" la meccanica quantistica come Einstein auspicava (Aspect, Grangier, Roger, 1982).

13. Tutto ciò naturalmente seguendo l'interpretazione "ortodossa" di Copenhagen; esistono, infatti, altre opzioni teoriche (Ghirardi, 2009). Per quanto riguarda i concetti di possibilità e realtà bisogna menzionare almeno l'interpretazione "a molti mondi", in quanto mantiene quelli della fisica classica. In forma del tutto generale, l'idea di Everett (1957) è che lo stato $|\Psi\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})\{|Gattovivo\rangle + |Gatto\ morto\rangle\}$ contiene possibili tutti passibili di entrare nel dominio del reale. Su questa linea, Everett afferma che se il gatto risulterà vivo dopo la misurazione, sarà morto in una realtà parallela e inconciliabile. Si assegna, in buona sostanza, una validità universale all'equazione di Schrödinger e si cerca di aggirare il problema della riduzione del pacchetto.

La meccanica quantistica non parla di traiettorie, nel senso di geodetiche che descrivono il movimento dei suoi oggetti, ma di funzioni d'onda di probabilità: essa parla della *probabilità* di incontrare il proprio oggetto in uno stato o in un altro. La fisica dei quanti è, pertanto, *intrinsecamente* probabilistica (Omnés, 1994). Ciò vuol dire che la probabilità non dev'essere pensata come una distanza dal vero, sul modello di Laplace (Laplace, 1967a), ma come il risultato cui giunge una teoria probabilistica e come testimonianza della sua irriducibile indeterminazione *epistemologica*.

Da un punto di vista filosofico, ciò è dovuto al fatto che la meccanica quantistica non risponde alla stessa domanda della fisica classica; essa descrive *come* due o più sistemi *interagiscono* (Rovelli, 1996). Questo elemento è teoricamente di estrema importanza per vari motivi. Innanzitutto, come accennato, il teorema di Bell ha escluso la possibilità di dar seguito all'idea delle "variabili nascoste" e quindi non si può ricondurre, almeno per questa via, la fisica dei quanti nell'alveo di quella classica. Qui, infatti, il valore delle variabili di un sistema descrive nel tempo lo stato del sistema stesso, dato uno spazio delle fasi. In meccanica quantistica, invece, le variabili non hanno un valore determinato per ogni t, ma solo nel momento in cui due o più sistemi interagiscono. Heisenberg ha mostrato molto bene come sia possibile stabilire la posizione di una particella *interagendo* con essa, in caso contrario essa si trova in "sovrapposizione di posizioni", vale a dire che la posizione non è una proprietà reale prima della misurazione: lo *stato* (quantistico) del sistema, *rispetto a quella proprietà specifica*, è descritto dalla funzione d'onda di Schrödinger, non da un valore ben definito, che appare solo nel momento in cui si ha interazione, in cui si perde la "coerenza quantistica", come mostra l'esperimento mentale del gatto (Omnés, 1994). La fisica classica, che si muove nel dominio della realtà, descrive un oggetto, le cui proprietà esistono *prima* e *al di là* della misurazione o dell'interazione con altro.

Se la meccanica quantistica si occupa di *come* i sistemi interagiscono, è necessario focalizzare l'attenzione, più che sui singoli sistemi, sulla loro relazione. Di qui, non è sufficiente definire le coordinate macroscopiche e microscopiche e *in seguito* farle interagire. Al fine di pensare la decoerenza, vale a dire il passaggio dalla possibilità alla realtà potenziale, è essenziale considerarle come *distinte e inseparabili*: non è sufficiente *giustapporle*, è necessario *tenerle insieme*. In altri termini, il sistema in generale si definisce *durante* l'interazione e non prima che avvenga, e così assume le proprietà che lo caratterizzano. La differenza può essere espressa nella maniera seguente:

$$H = H_c + H_e$$

dove H è il sistema globalmente considerato, H_c e H_e rappresentano rispettivamente la parte macroscopica e quella microscopica. È chiaro che una semplice giustapposizione non permette nessuno scambio energetico: H_c e H_e sono prima di tutto *isolati* e poi messi insieme. Se, al contrario, li si considera innanzitutto come distinti e inseparabili, è possibile pensare e rendere conto di un effetto di *dissipazione termica*. In tal senso, si può scrivere:

$$H = H_c + H_e + H_{int}$$

dove H_{int} rappresenta la dissipazione (Omnés, 1994).

Filosoficamente parlando, una determinata posizione, velocità ecc. non rappresenta un elemento di realtà *prima* dell'interazione. Di qui, se la possibilità si costituisce a partire da elementi esterni alla determinazione, il passaggio dalla possibilità alla realtà potenziale si costruisce a partire dall'*interazione*, a patto che quest'ultima abbia uno statuto epistemologico proprio, vale a dire che apporti nuovi elementi alla descrizione teorica del sistema, permettendo uno *spazio teorico* per H_{int}. Per esempio, attraverso il calcolo si possono determinare completamente gli stati *possibili* del gatto di Schrödinger, prima di aprire la scatola; tra essi la sovrapposizione rappresenta lo stato che non può entrare nella realtà. In tal senso, il possibile si emancipa dal reale. Si tratta di qualcosa di completamente diverso da quanto accade in fisica classica, perché non tutte le possibilità sono passibili di entrare nel dominio della realtà: *non è necessario che il possibile sia "destinato" a realizzarsi*, sia pur potenzialmente[14]. La mancanza di necessità implica che sia quanto meno complicato stabilire nessi causali in questo tipo di processi; in verità, si ha a che fare con un'irriducibile *contingenza*, propria dei fenomeni quantistici e dovuta alla maniera in cui è costruita la teoria. Più in generale, se si abbandona la prospettiva deterministica, diventa possibile emancipare la possibilità dalla realtà. Schematicamente si avrà:

1. il livello della possibilità (coerenza quantistica);
2. il livello della realtà potenziale (decoerenza quantistica);
3. il livello della realtà effettiva (misura).

Da un punto di vista filosofico, queste osservazioni mostrano che in meccanica quantistica è il "come" (l'interazione) che predispone, e non determina, la conoscenza del "che cos'è?", vale a dire, fornisce elementi di

14. Con riferimento a quanto detto, sia pur in nota, sull'interpretazione "a molti mondi", bisogna sottolineare che proprio quanto appena detto è il punto cruciale in cui "ortodossi" e "non-ortodossi" in generale si dividono.

realtà potenziale per l'oggetto che, come detto, si risolvono solo nel momento della misura.

Si tratta, è bene specificare, di un'interazione *a-causale*[15] che permette il passaggio dalla realtà potenziale a quelle effettiva. In questo senso, la contingenza gioca un ruolo fondamentale, anche se si conosce *a priori* la totalità dei possibili. È un aspetto essenziale che permette di comprendere il valore dello statuto probabilistico della meccanica quantistica e il senso *epistemologico* della sua indeterminazione. Per questi motivi, se non è possibile descrivere un sistema quantistico al di là di una qualsiasi interazione, ad esempio, con un "sistema osservante", allora persino l'*universalità* della sua descrizione dev'essere messa in questione (Rovelli, 1996).

Come accennato nel paragrafo 6.1, in meccanica quantistica la possibilità inizia a emanciparsi dalla realtà. Infatti, il quadro teorico fondamentale cambia tanto che esso non è deterministico, ma probabilistico. In tal senso, la fisica dei quanti può parlare solo *indirettamente* della natura, a causa di un'asimmetria tra calcolo e misura.

Per introdurre quanto si dirà riguardo alla biologia, si può anticipare che se l'interazione quantistica e la contingenza agiscono sulla scelta di possibili dati *a priori*, in biologia l'interazione e la contingenza agiscono anche sulla *costituzione* dei possibili. Ciononostante, la possibilità quantistica ha uno spazio teorico proprio, profondamente differente da quello della fisica classica, proprio in virtù di *possibili non passibili di entrare nella realtà* e costituiti al di fuori degli elementi di realtà di un qualsiasi sistema[16].

6.4
La biologia

La questione delle possibilità al di là della determinazione, così come quella del rapporto tra possibilità e realtà, è particolarmente complicata in biologia, perché presenta esigenze e problematiche nuove rispetto sia

15. Come si può intuire, la linea interpretativa "non-ortodossa" tende a mantenere la causalità, anche se reintepretata in senso probabilistico, coerentemente con una diversa interpretazione del rapporto tra possibilità e realtà.

16. Le interpretazioni "non-ortodosse" della meccanica quantistica, come accennato, ampliano il concetto di "realtà" fino a includervi la stessa possibilità, per cui finiscono per recuperare il senso classico di "realtà" (e di "causalità"), sia pur in chiave probabilistica. Resta comunque aperto il problema di come "misurare" tutti i reali ammessi.

alla fisica classica sia alla meccanica quantistica. Si è visto che le differenze che interessano quest'ultime sono tanto profonde in quanto hanno due strutture teoriche così diverse da essere per molti aspetti, almeno per ora, incompatibili. Ciononostante, hanno elementi in comune che le distanziano dalla biologia. In particolare, per i fini di questo capitolo, è necessario puntare l'attenzione sul fatto che esse si basano su *simmetrie* o *invarianti* fondamentali, che in uno spazio delle fasi pertinente la lista dei possibili è sempre nota *a priori* e che, più in generale, con particolare riferimento alla fisica classica, l'oggetto fisico è *generico*, mentre le traiettorie sono s*pecifiche*. Al contrario, come si afferma in Bailly e Longo (2006), le traiettorie biologiche sono *generiche* mentre l'oggetto è *specifico*. In altri termini, i percorsi onto-filogenetici sono percorsi possibili, mentre l'oggetto biologico è singolare. Già la semplice posizione di oggetti e traiettorie peculiari biologici apre la questione dell'applicabilità degli strumenti e dei concetti fisici alla biologia. Non esiste, purtroppo, una risposta univoca, né tanto meno gli studiosi si muovono in un'unica direzione.

Le problematiche che solleva la biologia sono, infatti, tuttora oggetto non solo di studio, ma in molti casi di formulazione, in quanto non esiste ancora una teoria qualitativamente e quantitativamente ben definita e condivisa che faccia da sfondo; manca, inoltre, una *teoria dell'organismo* (Longo *et al.*, 2015). In casi come questo, una delle migliori cose da fare è assumere un atteggiamento in buona parte storico, in modo da evidenziare alcune questioni spinose, senza l'ardire di fornirne la soluzione, ma al massimo di indicare alcune vie percorribili.

6.4.1. BIOLOGIA E DETERMINAZIONE

A cominciare dagli anni Cinquanta e Sessanta del secolo passato, in particolare dopo la scoperta e i primi importanti lavori sul DNA, i biologi hanno iniziato a proporre idee per la costituzione di teorie biologiche, prendendo in prestito il modello della fisica, come nei casi di Monod e Jacob, dell'opzione *organicista*[17], di quella *probabilista* e di quella *dinamicista*. Tutte, in forme senz'altro diverse, hanno cercato di rispettare i dettami fondamentali che caratterizzano la struttura delle teorie fisiche

17. Bisogna riconoscere che alcuni dei lavori più recenti tendono sempre più verso il riconoscimento di una specificità biologica. Tuttavia, da un punto di vista strettamente teorico, restano legati alla fisica da scelte teoriche di fondo (Moreno, Mossio, 2015a).

e in particolare della fisica classica[18]. Per questioni di spazio e di chiarezza espositiva, ci si concentrerà sull'alternativa di Monod e Jacob, mentre alle altre sarà riservato, purtroppo, solo qualche riferimento. In compenso, sarà possibile soffermarsi maggiormente su alcuni sviluppi recentissimi della biologia teorica, interessanti in quanto propongono, finalmente, un'opzione teorica completamente nuova, che non rispetta il modello fisico, in quanto non assume nessun invariante, nessuna simmetria in qualità di principio teorico.

Per quanto riguarda la biologia molecolare, le scelte di Monod sono estremamente indicative, in quanto egli stesso esplicita in maniera inequivocabile le sue intenzioni teoriche, orientate sulla fisica classica[19].

Bisogna riconoscere che questa "riduzione al microscopico" dei fenomeni della morfogenesi non costituisce, per ora, una vera teoria di questi fenomeni. Si tratta piuttosto di una posizione di principio che specifica solo i termini in cui una tale teoria dovrebbe essere formulata per non considerarla come qualcosa che produca semplicemente una descrizione fenomenologica. Questo principio definisce il fine che ci si aspetta, ma chiarisce solo debolmente il cammino da seguire per giungervi (Monod, 1989, pp. 115-6).

Da un punto di vista filosofico, questo passo è molto interessante, poiché Monod sostiene che la *riduzione* non è ancora una teoria, ma intravede la costituzione di una teoria *riduzionistica* perché parla di "posizione di principio", di qualcosa che è alla base (ed è dunque più cogente) della costruzione di una teoria.

In *La logique du vivant*, Jacob scrive:

Ogni ovulo contiene dunque [...] tutto il suo futuro, le tappe del suo sviluppo, la forma e le proprietà dell'essere che emergerà. L'organismo diventa così la realizzazione di un programma prescritto dall'eredità (Jacob, 1970, p. 10).

18. A questo proposito, Kupiec precisa che non fa «in alcun modo riferimento ad un *hasard* analogo a quello della teoria quantistica, che sarebbe costitutivo della materia. Il caso di cui io parlo resta legato all'agitazione termica» (Kupiec, 2012, p. 51). Questo tipo di caso è essenzialmente combinatorio e, dunque, presuppone la conoscenza a priori di tutti i possibili biologici. Di conseguenza, l'indeterminazione non potrà che essere *epistemica*.

19. Già nella *Prefazione* a *Il caso e la necessità*, Monod afferma che «tale teoria [l'evoluzionismo], per quanto la sua validità fenomenologica fosse stata accertata fin dagli ultimi anni del XIX secolo e pur dominando essa tutta la biologia, era destinata però a rimanere in sospeso finché non si fosse elaborata una teoria fisica dell'eredità» (Monod, 1989, p. 5). È bene sottolineare che il corsivo è di Monod.

Kupiec sintetizza le idee di Monod e Jacob in modo estremamente chiaro: il dogma centrale

> stipula che il flusso d'informazione possa passare solo dal DNA alle proteine e che un gene determini completamente una proteina attraverso l'informazione in esso contenuta. [...] Il DNA contiene [...] tutte le informazioni necessarie alla fabbricazione di un individuo. Queste sono codificate e formano un vero e proprio programma genetico. Se fossimo capaci di decifrare queste informazioni, potremmo letteralmente leggere l'individuo sul DNA (Kupiec, Sonigo, 2000, p. 67).

La strategia filosofica è chiara: è possibile *ridurre* l'individuo ai suoi elementi costitutivi (i geni e l'informazione). Di conseguenza, l'individuo reale, che si tratti di una cellula o di un cane, deriverà da una delle combinazioni possibili di elementi semplici che rappresentano l'invariante fondamentale di Monod[20]. In generale, recuperando l'idea per cui una teoria che assuma l'unità *deve* spiegare la variazione, se «l'invariante biologico fondamentale è il DNA» (Monod, 1989, p. 133; Perutz, 2007), allora la biologia di Monod e tutti gli approcci che ne mantengono i presupposti, devono spiegare la *variazione*. Quest'ultima può essere pensata in due modi: o come l'apparizione di un carattere nuovo al livello del fenotipo, una mutazione del DNA ecc., o come possibilità di scelta all'interno di possibili noti *a priori*. Rispetto a quest'ultimo caso, Jacob afferma che l'ambiente e la contingenza in generale hanno un influsso *reale* sulla scelta dei possibili, rigorosamente noti *a priori*.

> La rigidità del programma varia, dunque, secondo le operazioni. Certe istruzioni sono eseguite alla lettera. Altre si traducono attraverso capacità o potenzialità. Ma, in fin dei conti, è il programma stesso che fissa il suo grado di flessibilità e lo spettro delle variazioni possibili (Jacob, 1970, p. 18).

Per quanto riguarda la variazione radicale, vale a dire non la scelta, ma la *costituzione* di possibilità nuove, in *La logique du vivant*, ma anche ne *Il caso e la necessità*, sono presenti più occorrenze del verbo *survenir*: la possibilità di un cambiamento biologico radicale *survient* (sopravviene) al quadro teorico della biologia, perché è *impossibile* pensarlo *in* una biologia riduzionistica e deterministica. «I cambiamenti del testo chimico sopravvengono, non attraverso la modificazione di una sequenza preventivamente scelta, ma alla cieca» (ivi, p. 309).

20. Nel testo di Jacob si legge: «Il programma genetico, infatti, è costituito dalla combinazione di elementi essenzialmente invarianti. A causa della sua stessa struttura, il messaggio dell'eredità non permette il minimo intervento esterno» (Jacob, 1970, p. 10).

Questo passo ricorda il titolo del libro di Monod *Il caso e la necessità*. In questo tipo di approccio, il caso e la necessità sono due concetti che si trovano e restano opposti: comprendere scientificamente la natura significa, in effetti, scoprire degli invarianti[21], costruire una teoria degli invarianti fondamentali, anche se la variazione è uno degli elementi fondamentali della vita, se non addirittura il più importante.

In una teoria degli invarianti (nella misura in cui essa è *deterministica* e *riduzionistica*) non c'è alcuno spazio per pensare la variazione radicale: questa, come visto, "sopravviene" ai processi biologici, senza poterne cambiare lo sviluppo (*ibid.*). È, in verità, possibile cambiare elementi del DNA, ma il meccanismo di copia resta sempre lo stesso, anche se i risultati saranno diversi. Quest'approccio teorico dimentica dunque completamente l'importanza della variazione e, pur ipotizzando erroneamente che l'informazione sia contenuta tutta nel DNA, non si sofferma sulla maniera in cui possono essere attivati i geni (Lemke, Coutinho, Lange, 2004).

In questo senso, la variazione viene posta al di fuori di un presunto spazio dell'essenza, perché è presa in considerazione solo nel momento in cui modifica il "messaggio genetico" e non è considerata in sé stessa, vale a dire, non è pensata all'interno del corpo teorico. La variazione radicale risulta essere semplicemente un evento extra-teorico.

> Solo gli errori che comportano un cambiamento del messaggio genetico stesso, vale a dire le mutazioni, possono avere conseguenze importanti per lo spazio, perché, una volta apparse, sono a loro volta fedelmente ricopiate di generazione in generazione (Jacob, 1970, p. 309).

In questo passo, Jacob propone un legame molto interessante tra "mutazione", "errore" e "copia fedele". Si tratta di una relazione più che coerente nel quadro teorico riduzionistico e determinista.

Infatti, questa biologia può pensare solo processi come *iterazioni sempre all'identico* (Buiatti, Longo, 2013). «Il batterio cresce e si allunga. Poi

21. Jacob (1970, p. 313): «Il messaggio nucleico non riceve lezioni dall'esperienza». Monod (1989, p. 128): «La strategia fondamentale della scienza nell'analisi dei fenomeni è la scoperta di invarianti. Tutte le leggi fisiche, come del resto tutti gli sviluppi matematici, specificano una relazione d'invarianza; le proposizioni più fondamentali della scienza sono postulati di conservazione». Ivi, p. 133: «I costituenti universali, i nucleotidi da un lato e gli aminoacidi dall'altro, sono l'equivalente logico di un alfabeto in cui sarebbe scritta la struttura, dunque le funzioni associative specifiche delle proteine. In questo alfabeto può quindi essere scritta tutta la diversità delle strutture e delle *performances* che contiene la biosfera. L'invariante biologico fondamentale è il DNA».

si divide in due, producendo così due batteri, identici tra loro e con quello che li ha prodotti» (Jacob, 1970, p. 288)[22].

Una volta mostrato che questo approccio riconduce i fenomeni ai loro elementi fondamentali e al rapporto che li lega, è necessario soffermarsi ancora un po' sulla sua base gnoseologica. In *Il caso e la necessità*, si legge:

> La struttura portata a termine non è affatto preformata in quanto tale. Ma il piano della struttura era presente nei suoi stessi elementi costitutivi. Essa può dunque realizzarsi in modo autonomo e spontaneo, senza interventi esterni, senza l'introduzione di informazione nuova. La costruzione epigenetica non è una creazione, è una *rivelazione* (Monod, 1989, p. 114).

Questo passo mostra, di nuovo, il riduzionismo del pensiero di Monod. Se si aggiunge che l'invariante fondamentale del vivente (il DNA) è pensato attraverso la metafora del programma informatico e l'ipotesi filosofica che il vivente sia interpretabile essenzialmente attraverso il discreto, si può affermare che questa biologia mette in opera un'argomentazione ontologica. In tal senso, le idee di programma e codice non forniscono un'*immagine* della realtà, esse *sono* la realtà. Se la "discretizzazione" ha un ruolo ontologico, è possibile cogliere l'essenza della vita; diventa pertanto legittimo considerare il rumore e la variazione come elementi accidentali.

In altri termini, quest'approccio *teorico* alla biologia ricalca quasi esattamente quello della fisica anteriore a Poincaré. Il "quasi" è dovuto al fatto che si ammette la variazione radicale, ma non la si include, e non la si può includere per motivi strutturali, all'interno della *teoria* biologica. Ovviamente, questo non significa che si tratti di «possibilità al di là della determinazione», perché non è escluso che l'indeterminazione che limita la conoscenza della variazione sia *epistemica*. In verità, se si considera che quando si parla di indeterminazione lo si fa a partire da una specifica struttura teorica, se ne deduce che in una biologia basata sul modello della fisica classica, essa non può che essere *epistemica*. Al contrario, l'indeterminazione *epistemologica*, come nel caso della meccanica quantistica, rappresenta un elemento interno alla teoria che stabilisce solo un "limite" alla descrizione, se considerata con i parametri della fisica classica. In tal senso, la variazione radicale è totalmente al di fuori di una qualsiasi biologia deterministica. In questo tipo di approccio, infatti, è coerente pensare che se

22. Oggi è noto che la similarità tra i batteri si ferma al 30%-40%.

fosse possibile conoscere tutti gli elementi che producono una variazione, questa sarebbe prevedibile[23].

Per quanto riguarda il rapporto tra possibilità e realtà e per la questione delle possibilità al di là della determinazione, si può affermare che la scelta di costruire la biologia come una teoria "fisica" (classica) impone di situare la possibilità completamente all'interno della determinazione. La teoria ammette un'indeterminazione, *sempre epistemica*, che *non* agisce sulla *costituzione* dei possibili, ma solo sulla *scelta* dei possibili, tutti comunque, almeno per principio, dati *a priori*. Quanto detto sulla fisica classica vale anche nella biologia di Monod o, comunque, in tutte quelle prospettive che assumono un invariante come principio teorico e che, in aggiunta, considerano l'oggetto biologico alla stregua dell'oggetto fisico. Coerentemente con quest'impostazione, risulta in definitiva difficilissimo pensare la variazione radicale all'interno del corpo teorico, pena dover rinunciare al principio di unità o simmetria teorica di fondo. La variazione appare come qualcosa di esterno (un evento) che ha un valore reale, ma non teorico, solo nel momento in cui appare. In effetti, una volta che una mutazione avviene, che si ha un "errore di copia", questo viene ricopiato così com'è e quindi non altera il meccanismo di copia. Ciò che cambia non sono direttamente i possibili, ma il *codice* per produrre nuovi possibili. Questi sono e restano sempre riducibili agli elementi del sistema biologico o a loro combinazioni.

Allo stesso modo, la prospettiva organicista (Varela, 1979)[24], che considera l'organizzazione come principio teorico, ripropone di sicuro un invariante, come la biologia di Monod, ma recupera l'autorganizzazione fisica e una visione strutturale, anche se non pienamente relazionale (Marinucci, in stampa). In Montévil e Mossio (2015) l'organizzazione biologica è interpretata come *closure of constraints*, che forma un regime *causale* chiuso, in base al quale può essere descritta una qualsiasi struttura biologica, in quanto si forma e si mantiene. Nonostante l'idea della "chiusura dei vincoli" rappresenti realmente un'ottima opzione per pensare l'organizzazione biologica, tanto da poter essere usata in altri contesti teorici, presenta dei problemi proprio per lo stretto legame che ancora mantiene con la fisica. Il primo consiste nel fatto che la temporalità di tutto ciò che si autorganizza in fisica, gli uragani ad esempio, è *processuale*, nel senso che tutti gli

23. In questa direzione possono essere interpretate tutte quelle linee di ricerca che si concentrano sulla "riprogrammazione" cellulare per sconfiggere malattie come il cancro e che non hanno dato i risultati sperati (Nowell, 1976; Weinberg, 2014).

24. Il concetto di *closure of constraints* rappresenta un significativo passo avanti (Montévil, Mossio, 2015).

uragani hanno lo stesso sviluppo, al contrario di due qualsiasi esseri viventi, che hanno tempi ed evoluzioni storiche diverse. Ritorna dunque il presupposto fisico per cui gli oggetti teorici sono generici. Inoltre, quando ci sono le condizioni fisiche per la formazione di un uragano, questo si forma *necessariamente*, mentre in biologia non esiste qualcosa come la totalità delle condizioni necessarie e sufficienti perché si debba avere un qualsiasi fenotipo o la variazione radicale; se fosse così, sarebbe difficile spiegare la compresenza di due specie differenti con la stessa origine (West-Eberhard, 2003). Un ultimo elemento, particolarmente importante per i fini di questo capitolo, è che il regime causale necessita di un elemento esterno per essere modificato, ma, come si vedrà, da questo punto di vista risulta complicato spiegare l'insorgere del cancro, che può non avere elementi esterni a una struttura organica.

La variazione radicale, anche qui, resta fuori dal corpo teorico; tuttavia, questa prospettiva ha l'innegabile merito di spostare l'attenzione dal messaggio e dal DNA alle strutture in quanto tali, senza porre in opera meccanismi di riduzione. La variazione, anche in questo caso, "sopravviene" alla *closure of constraints*. In altri termini, quest'ultima rappresenta un vero e proprio progresso nella spiegazione dell'organizzazione; ciò su cui si nutrono dubbi, almeno sulla linea dell'emancipazione della biologia dalla fisica, è proprio lo sfondo teorico in cui s'inserisce.

Da questo punto di vista, nonostante sembri possibile affermare che anche questi approcci ammettano "possibilità al di là della determinazione", in realtà non è così perché le possibilità devono comunque essere *pensabili* all'interno del corpo teorico; il che non significa che debbano essere *determinabili* o essere passibili di entrare nel dominio della realtà. In effetti, è proprio questa la sfida della biologia teorica, *pensare* delle possibilità al di là della determinazione senza pretendere di determinarle *a priori*. Per questo motivo, si è accennato che il problema posto in biologia va oltre il problema del rapporto tra possibilità e realtà della meccanica quantistica: la questione diventa, nello specifico, la *costituzione* della possibilità.

6.4.2. PER UNA BIOLOGIA OLTRE LA FISICA

Se, al contrario di quanto detto finora, si ammette che la variazione sia un elemento centrale della biologia e che non abbia un identico correlato in fisica, allora è necessario inserirla all'interno del corpo teorico di una biologia che abbia un proprio spazio epistemologico, diverso da quello fisico, anche se non in contraddizione con esso.

Da un punto di vista più strettamente filosofico, se si assume la variazione come principio teorico, si *dovrà* spiegare la formazione e il mantenimento dell'unità. In termini moderni, alle simmetrie di fondo che permeano la fisica, al fatto che qualcosa si conserva sempre, si può opporre una biologia imperniata sulla variazione, sulle rotture di simmetria e, più in generale, sul fatto che qualcosa *non* si conserva. Uno dei tentativi più consistenti a questo riguardo, al di là della ben nota posizione di Darwin e del suo primo principio, "discendenza con modificazioni", è quello che prende le mosse da (Bailly, Longo, 2006).

Ovviamente, costruire una teoria attorno all'unità o alla variazione è una scelta teorica di fondo che distingue profondamente due maniere di pensare la vita. Entrambe hanno frecce al proprio arco, così come punti di contatto, tuttavia la differenza appena ricordata è tanto radicale che apre alla biologia cammini completamente diversi. In questa sede, non è possibile esporre l'approccio incentrato sulla variazione nella sua totalità; tuttavia, vale la pena soffermarsi su alcuni elementi specifici, perché esso apporta novità enormi al dibattito scientifico e pone problemi filosofici davvero cruciali. Naturalmente, l'attenzione si concentrerà solo su ciò che è più legato al tema delle "possibilità al di là della determinazione" e al rapporto tra possibilità e realtà.

La questione della variazione è dunque un problema teorico, proprio della biologia, che s'impone e che non può essere lasciato sullo sfondo, sia a partire da quanto detto sinora e sia perché, banalmente, la variazione è il motore della vita. La sua centralità implica, sul piano teorico, ulteriori spunti di riflessione: per esempio il fatto che, come già affermava Darwin, "specie", "famiglia" ecc. sono *concetti* che si usano per designare gruppi di fenotipi, ma che non esistono nella realtà, in quanto ciascun individuo mantiene la propria irriducibile "singolarità" (Bailly, Longo, 2006). Se, pertanto, si ammette che l'oggetto biologico non sia pensabile sul modello di quello fisico, che è generico, è necessario ripensarlo completamente. Come già ricordato, assumere che l'oggetto biologico sia specifico e che le traiettorie siano generiche, vale a dire possibili, permette proprio di dare alla variazione un ruolo centrale all'interno del corpo teorico. In questo caso, essendo ciascun oggetto diverso dall'altro, a causa di una propria storia onto-filogenetica, tutt'altro che "processuale" (Varela, 1979), l'unità non sarà un presupposto teorico, ma un *risultato* di rotture di simmetria contingenti. Ogni rottura è, allo stesso tempo, la formazione di una nuova simmetria. A un oggetto che si specifica e che si definisce in una «densità dei punti critici» (Bailly, Longo, 2006, p. 235) corrisponde una teoria che assume la variazione come suo principio. Quest'ultima, pertanto, va a caratterizzare il *default state* del vivente, preso nella sua singolarità (Longo, Montévil, 2014; Sonnenschein, Soto, 2007). Di qui, il fatto di considerare la variazione e la singolarità come elementi centrali per la costituzione degli oggetti biologici consegna la biologia a un'inaggirabile contingenza[25]. L'intento, pertanto, non può essere quello di "determinare" la variazione, ma sarà quello di pensarla, in quanto essa è *indeterminabile*, ma sempre *possibile*, esattamente come *non* avviene in fisica classica.

Più in generale, l'oggetto biologico è caratterizzato dal fatto che cambia nel tempo: si pensi alla mitosi o a un qualunque processo ontogenetico e filogenetico. Di qui, già al livello cellulare si hanno le prime rotture di simmetria, in quanto le cellule prodotte non sono identiche tra loro né con quella da cui derivano. Se la variazione è il *default state* della vita (*ibid.*), allora è necessario capire come si mantengano le strutture biologiche, dai tessuti fino agli organismi. Infatti, al livello funzionale, non è necessario che le rotture di simmetria del livello cellulare ne producano altre ai livelli superiori, ma nemmeno se ne può escludere la possibilità. Di certo si può dire che i percorsi filogenetici hanno prodotto strutture e processi ben organizzati e vincolati che limitano fortemente la variazione. Proprio quella contingenza che non permette di determinare la variazione radicale, da un punto di vista onto-filogenetico àncora saldamente i fenotipi al loro percorso evolutivo, caratterizzato dalla selezione delle diverse tipologie organizzative presenti nelle varie forme del vivente.

È precisamente in questo contesto che è possibile recuperare la nozione di *closure of constraints* organicista, ma in un modo che ne cambia radicalmente il significato. Se nel suo ambito di origine essa rappresenta la descrizione di un'organizzazione, che si presenta come un invariante teorico, qui rappresenta una descrizione possibile di una struttura storicamente determinata che non necessita di una causa esterna per modificarsi, ma che *limita* la variazione che agisce come *default state* del vivente. In altri termini, essa mantiene un equilibrio dal quale non riesce a eliminare le possibilità di rotture, anche quando quest'ultime possono essere altamente improbabili.

25. Oltre al fatto che in biologia sono presenti fenomeni quantistici (Del Giudice *et al.*, 1986; Del Giudice, Preparata, 1998), indeterminazione e contingenza si caratterizzano anche per il fatto che i processi biologici sono strettamente legati al tempo storico onto-filogenetico del vivente. Al contrario, in fisica, si parla per lo più di tempi "processuali", vale a dire i tempi caratteristici di un oggetto (generico). In altri termini, i processi fisici, deterministici o stocastici, lineari o non-lineari, sono per lo più markoviani. I processi biologici, invece, sono per lo più non-markoviani.

In *The society of cells* (*ibid.*) si tenta, a questo proposito, la strada dei princìpi di proliferazione con variazione e motilità, proprio per superare i fallimenti nello spiegare il cancro attraverso la ricerca di cause di tipo tradizionale. L'esemplarità e l'importanza teorica di questa malattia è dovuta al fatto che, in generale, il cancro può non avere delle "cause esterne" al tessuto o all'organismo e nemmeno "cause interne", nel senso della causalità fisica, come invece si pensava fino a qualche decade fa; né si tratta di ricodificare le cellule (Longo, 2018; Weinberg, 2014). In tal senso, non si hanno mai le condizioni (o le cause) necessarie e sufficienti per la produzione del cancro. Se la *closure of constraints* di un organo fosse davvero retta da un regime causale di tipo fisico, allora il cancro non dovrebbe mai prodursi in quanto, in una prospettiva organicista strettamente legata alla fisica, la variazione è spiegabile solo attraverso un agente esterno, che non esiste nel caso del cancro. Interpretare la *closure of constraints* come qualcosa che *limita* la variazione permette di superare problemi di questo tipo, almeno dal punto di vista della coerenza teorica.

Da un punto di vista generale, se risulta difficile applicare rigidamente una causalità di tipo fisico, l'opzione probabilistica "classica" di Kupiec (2012) risulta inadeguata a risolvere questo problema perché la lista dei possibili è nota *solo parzialmente a priori*; a rigor di termini non si possono applicare le probabilità agli oggetti, in quanto, matematicamente, mancherebbe il denominatore. Del resto, dell'*hopeful monster* non si conoscono i caratteri nuovi né quantitativamente né qualitativamente e, in fin dei conti, non si può prevedere nemmeno se esso stesso apparirà a discapito o insieme ai fenotipi storicamente determinati. In effetti, in questo contesto biologico, a differenza della fisica, il *concetto* di aleatorio e lo strumento *matematico* della probabilità non sono sovrapponibili al livello dei fenotipi (Marinucci, in stampa). In fisica, tutto ciò è sempre possibile perché la lista dei possibili è nota *a priori*. La probabilità può però essere recuperata se la si applica agli *insiemi* dei fenotipi possibili, vale a dire, da un lato all'insieme dei fenotipi noti storicamente *a priori* e, dall'altro, alla possibilità degli *hopeful monsters*. Un esempio aiuta senz'altro la comprensione. Se si considera la riproduzione del pesce zebra[26] (Villoutreix, 2015), in condizioni normali ci si aspettano i fenotipi storicamente noti, ma se le condizioni cambiano le *chances* che appaia un *hopeful monster* aumentano. Lo stesso dicasi per

26. Si tratta di un pesce sottoposto a mutazione genetica, per cui l'insieme dei fenotipi noti ha le seguenti caratteristiche: 1. due occhi a distanza normale; 2. due occhi vicini; 3. un occhio solo centrale.

la formazione del cancro: esistono delle condizioni che ne aumentano le "probabilità"; tuttavia, pare almeno difficile parlare di necessità e/o di una causalità forte. Il fumo aumenta il pericolo, ma esistono persone che hanno fumato durante tutta la vita e non hanno mai avuto problemi di cancro, ad esempio, ai polmoni, e persone che non hanno mai fumato e che sono morte di cancro ai polmoni. Già da quanto appena ricordato emerge la differenza menzionata per cui, se il dominio della fisica classica è il reale, la biologia si occupa del possibile e della sua costituzione; pertanto, l'oggetto biologico si costituisce in quanto *possibile* e non in quanto reale.

Queste considerazioni impongono una riflessione seria, perché i processi biologici appaiono irrimediabilmente contingenti, senza che sia possibile stabilire nessi causali rigidi. Di sicuro la *closure of constraints*, vale a dire l'autonomia e l'organizzazione biologiche, pensata come chiusura causale di vincoli, rappresenta una maniera interessante di descrivere le strutture dell'organizzazione biologica, in riferimento al *reale*. Tuttavia appare riprodurre il modello teorico della fisica, riproponendo i problemi già evidenziati riguardo alla variazione biologica. Il problema è che, come detto, l'autopoiesi fisica è caratterizzata dal fatto che quando ci sono le condizioni per la formazione, ad esempio, di un uragano, dal punto di vista della descrizione matematica esso deve formarsi e seguirà il proprio tempo processuale fino a dissolversi. Come mostrano i semplici esempi appena mostrati, in biologia ciò non accade.

In questo nuovo contesto, la chiusura dei vincoli può far sì che un organismo si mantenga, nonostante lo stato di *default* sia la variazione. A questo proposito, è particolarmente interessante il concetto di *enablement* (Longo, Montévil, Kauffman, 2012), per il quale determinate condizioni non "causano" una determinata struttura, ma la "rendono possibile".

Al fine di chiarire, per quanto possibile, le implicazioni della differenza tra causa ed *enablement*, è utile cominciare con un esempio. Un medico che diagnostica una malattia virale o batterica afferma giustamente che l'elemento esterno è la "causa" della malattia, perché senza il virus o il batterio la malattia non si sarebbe generata; tuttavia, egli deve studiare anche le condizioni per le quali si è potuta sviluppare la malattia, in quanto, a ben vedere, non c'è nessuna necessità per la quale, in presenza di virus o batteri, una malattia debba manifestarsi. Dal punto di vista deterministico della fisica classica, in presenza di batteri e/o virus, tutti dovrebbero essere sempre malati (ipotesi chiaramente assurda sia fisicamente sia biologicamente) o, quanto meno, tutti dovrebbero ammalarsi *a partire dalle stesse condizioni iniziali*, il che è biologicamente del tutto assurdo, ma fisicamente comprensibile.

In biologia, la causa può essere considerata come “differenziale”:

Un classico errore consiste nel dire: questa mutazione causa un bambino con un ritardo mentale (un famoso disordine genetico: la fenilchetonuria), quindi... il gene colpito dalla mutazione è il gene dell'intelligenza, o qui c'è il gene che causa/determina l'intelligenza. In termini logici, si tratterebbe di dedurre da “non-A implica non-B” che “A implica B”: uno stupefacente errore. Tutto ciò che conosciamo è una correlazione causale di differenze (Longo, Montévil, Kauffman, 2012, p. 14).

Una direzione possibile per risolvere questa situazione prevede di concentrarsi sulla differenza tra i domini della biologia e della fisica; mentre quest'ultima si trova nel dominio del reale e descrive la realtà, la prima si trova nel dominio del *possibile* e descrive delle possibilità che, ovviamente, si applicano al reale. In tal senso, la causalità e la *closure of constraints* si muovono al livello delle dinamiche biologiche reali, ma agiscono su elementi che sono costituiti al livello del possibile. Di qui, l'*enablement*, il “rendere possibile”, diventa necessario a partire dall'indeterminazione biologica e si riferisce alla costituzione contingente dei possibili biologici, passibili o meno di entrare nel dominio del reale. È bene tenere sempre distinti questi piani, perché il mantenimento (*reale*) di una struttura o l'apparizione (*reale*) della variazione possono avere effetti positivi o negativi per l'organismo, che dipendono in ultima istanza dalla maniera in cui quest'ultimo si struttura e, soprattutto, da ciò che eventuali modificazioni “rendono possibile” (*enable*).

Porre l'attenzione sulla *relazione* tra gli elementi di un sistema biologico, in vista di ciò che rendono possibile, più che sul regime causale che li reggerebbe, permette una descrizione diversa del vivente[27], basata sull'*enablement*, più che sulla causalità. In tal senso, per quanto riguarda il ritmo del cuore, come mostra il lavoro di Noble (2003), non solo non esiste l'oscillatore (“causa”), ma non si hanno nemmeno le stesse condizioni per i diversi esseri viventi dotati di cuore: è l'organismo nella sua totalità che contribuisce al ritmo cardiaco.

Una questione ulteriore, che rafforza quanto si sta dicendo, è che un cambiamento quantitativo e qualitativo nel regime causale che produce e

27. È bene ribadire che, in questa prospettiva, la *closure of constraints* è sempre un elemento imprescindibile in quanto all'interno dell'evoluzione si sono costituiti fenotipi a complessità crescente (Gould, 1996), con tipologie organizzative sempre più stabili. Ciononostante, la stessa evoluzione ha mostrato costantemente cambiamenti radicali, resi possibili (*enabled*) dalla relazione tra la variazione e i suoi vincoli.

mantiene (e non "rende possibile") un uragano, ne determina il disfacimento. In biologia, al contrario, un cambiamento qualitativo o quantitativo di una *closure of constraints* può aumentarne la robustezza (Lesne, 2008). Una delle differenze fondamentali tra una biologica "fisica" e una biologia basata sulla variazione è che in quest'ultima le *closures of constraints* descrivono strutture che *limitano* e *canalizzano* la variazione; al contrario, nella prima, la *closure of constraints* crea una struttura, non limita nulla, esprime una necessità legata a un determinato regime causale[28]. Come si è visto, una possibile soluzione può essere proprio la ridefinizione del rapporto tra possibilità e realtà biologiche.

In effetti, i problemi posti dalla variazione biologica sono di difficile soluzione, in quanto impongono di ridiscutere in maniera nuova, oltre ai concetti di *possibilità* e *realtà*, anche quelli di *causalità* e *necessità*, applicati alla biologia. In questa sede, si sono volute proporre solo alcune idee teoriche generali, rispetto a come tali concetti possono essere declinati, senza con questo pretendere di fornire un quadro generale o completo.

Riassumendo, si può dire che questo secondo approccio alla biologia permette di pensare "possibilità al di là della determinazione" in quanto il dominio di questa biologia passa dalla realtà alla possibilità (così come il suo primo livello di descrizione teorica) ma, a differenza della fisica quantistica, la biologia si concentra sulla possibilità e sulla costituzione dei possibili poiché quest'ultimi non sono dati *a priori*. La possibilità si trova a essere, anche qui, ben distinta dalla realtà, ma risulta essere indeterminabile.

6.5
Conclusioni

La questione e il significato di "possibilità al di là della determinazione", almeno nella forma in cui è stata qui discussa, sono legati strettamente alla teoria che si adotta e alla sua propria e interna nozione di "indeterminazione". Infatti, laddove le teorie presentino differenze di fondo, queste si riverberano sulla maniera in cui concepiscono e descrivono il proprio oggetto e, di qui, sulla relazione tra possibilità e realtà.

28. Sebbene, in parte, questo elemento è presente negli organicisti, non è chiaro come pensare il fatto che in biologia, anche parlando di causalità, sia difficile applicare un concetto di necessità di tipo fisico (classico). In verità, non parrebbe esistere un effettivo spazio teorico all'interno di un approccio basato sulla variazione.

In tal senso, in maniera conclusiva e prendendo le mosse da un'esigenza della meccanica quantistica, si è sostenuto che in fisica classica le possibilità sono interne alla determinazione e che l'indeterminazione è sostanzialmente epistemica. Di qui, le possibilità, tutte passibili di entrare nel dominio della realtà, sono state poste direttamente al suo interno, proponendo la distinzione tra realtà potenziale o possibile e realtà effettiva.

In meccanica quantistica, al contrario, non tutte le possibilità sono passibili di entrare nella realtà[29] e inoltre si costituiscono, almeno in parte, al di là della determinazione reale; quindi è stato necessario, seguendo le idee di Heisenberg, separare nettamente la possibilità dalla realtà. In tal senso, si sono affrontate questioni relative al passaggio tra possibilità, realtà potenziale ed effettiva, sottolineando le differenze con la fisica classica e il fatto che l'indeterminazione quantistica sia *epistemologica*, vale a dire intrinseca alla teoria.

Per quanto riguarda la biologia, laddove si assuma un principio di conservazione, un invariante di tipo fisico come il DNA o l'organizzazione, le possibilità al di là della determinazione non possono avere spazio nel corpo teorico. Basandosi sul modello della fisica classica, le possibilità non potranno che essere interne alla determinazione. Se, al contrario, si assume la variazione come principio teorico, le possibilità al di là della determinazione possono essere pensate, ma non determinate, nel corpo teorico. Si è di fronte a una situazione per cui il dominio della biologia risulta essere quello della possibilità, ma, dal momento che la lista completa dei possibili non è data *a priori*, la biologia si deve occupare innanzitutto della *costituzione* del possibile. A questo proposito, ci si è limitati solo a proporre alcuni concetti che indicano una direzione feconda per la costituzione di una biologia teorica che non ricalchi il modello fisico.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Diego Centofanti e Angelo Di Lorenzo che con i loro suggerimenti mi hanno aiutato a migliorare questo testo.

29. Tutto ciò sempre se si considera la interpretazione "ortodossa". Altri considerano invece qualsiasi possibilità di per sé e in quanto tale parte integrante della "realtà oggettiva".

Bibliografia

AITON E. (1995), *The Vortex in Competition with Newtonian Celestial Dynamics*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 3-21.

ALBERT R., JEONG H., BARABÁSI A.-L. (1999), *The Diameter of the World-Wide Web*, in "Nature", 401, pp. 130-1.

ALEXANDROV A., KOLMOGOROV A., LAVRENT'EV M. (2004), *Le matematiche*, Bollati Boringhieri, Torino.

ÁLVAREZ JIMÉNEZ C. A. (2001), *Mathematical Analysis and Analytical Science*, in M. Otte, M. Panza (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer Academic, Dordrecht-Boston-London.

AMSTERDAMSKI S. (éd.) (1990), *La Querelle du determinisme: philosophie de la science d'aujourd'hui*, Gallimard, Paris.

ANDRONOV A. A. *et al.* (1973), *Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York.

ARNDT M., JUFFMANN T., VEDRAL V. (2009), *Quantum Physics Meets Biology*, in "HFSP Journal", 3, 6, pp. 386-400.

ARNOLD V. I. (1979), *Equazioni differenziali ordinarie*, Edizioni Mir, Mosca.

ID. (1988a), *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New York.

ID. (1988b), *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, Roma.

ID. (1990), *Teoria delle catastrofi*, Bollati Boringhieri, Torino.

ID. (1992), *Catastrophe Theory*, Springer, New York.

ASPECT A., GRANGIER P., ROGER G. (1982), *Experimental Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, in "Physical Review Letters", 49, p. 91.

BAILLY F., LONGO G. (2006), *Mathématiques et Sciences de la Nature*, Hermann, Paris (trad. ingl. rivista *Mathematics and the Natural Sciences. The Physical Singularity of Life*, Imperial College Press, London 2011).

IDD. (2009), *Biological Organization and Anti-Entropy*, in "Journal of biological systems", 17, 1, pp. 63-96.

BARROW-GREEN J. (1997), *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, Providence (RI).

BARTOCCI C. (1995), *Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica*, in Id. *Geometria e caso*, Bollati Boringhieri, Torino, 1995, pp. VII-L.

BÉCAVIN C., VICTOR J., LESNE A. (2012), *The Condensed Chromatin Fiber: An Allosteric Chemomechanical Machine for Signal Transduction and Genome Processing*, in "Physical Biology", 9, 1.

BELLONE E. (1973), *I modelli e la concezione del mondo nella fisica moderna da Laplace a Bohr*, Feltrinelli, Milano.

ID. (1979), *Le leggi del movimento da Hume a Laplace*, Loescher, Torino.

ID. (1980), *Il sogno di Galileo*, Il Mulino, Bologna.

BENNETT M. *et al.* (2002), *Huygens' Clocks*, in "Proceedings of the Royal Society: A Mathematical, Physical and Engineering Sciences", vol. 458, pp. 563-79.

BERRY M. (1990), *Anticipations of Geometric Phase*, in "Physics Today", 43, 12 (https://physicstoday.scitation.org/DOI/10.1063/1.881219).

BERTALANFFY L. VON (2008), *Teoria generale dei sistemi*, Mondadori, Milano.

BERTHOZ A. (1997), *Le sens du movement*, Odile Jacob, Paris.

BERTINI L. *et al.* (2015), *Macroscopic Fluctuation Theory* (https://arxiv.org/pdf/1404.6466.pdf).

BERTUGLIA C., VAIO F. (2006), *Non linearità, caos, complessità*, Bollati Boringhieri, Torino.

BINNEY J. *et al.* (1992), *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*, Oxford University Press, Oxford.

BISCHI G. I. *et al.* (2004), *Sulle orme del caos*, Bruno Mondadori, Milano.

BIZZARRI M. (2012), *The New Alchemist. The Risks of Genetic Modification*, The MIT Press, Boston.

BLACK M. (1962), *Models and Metaphors*, Ithaca, New York.

BLAY M. (1992), *La naissance de la mécanique analytique*, Presses Universitaires de France, Paris.

BLONT Z. D., BORLAND C. Z., LENSKI R. E. (2008), *Historical Contingency and the Evolution of a Key Innovation in an Experimental Population of* Escherichia coli, in "Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America", 105, 23, pp. 7899-906.

BOISEAU R., VOGEL D., DUSSUNTOUR A. (2016), *Habituation in Non-Neural Organisms: Evidence from Slime Moulds*, in "Proceedings of the Royal Society B", 283, 1829.

BOLTZMANN L. (1999a), *Sui princìpi della meccanica*, in C. Cercignani (a cura di), *Modelli matematici, fisica e filosofia. Scritti divulgativi*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 161-87.

ID. (1999b), *Sui princìpi e le equazioni fondamentali della meccanica*, in C. Cercignani (a cura di), *Modelli matematici, fisica e filosofia. Scritti divulgativi*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 129-60.

ID. (1999c), *Sulla meccanica statistica*, in C. Cercignani (a cura di), *Modelli matematici, fisica e filosofia. Scritti divulgativi*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 195-210.

ID. (1999d), *Sullo sviluppo dei metodi della fisica teorica*, in C. Cercignani (a cura di), *Modelli matematici, fisica e filosofia. Scritti divulgativi*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 102-28.

BONIOLO G. (1999), *Metodo e rappresentazioni del mondo*, Bruno Mondadori, Milano.

BOTTAZZINI U. (1981), *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Bollati Boringhieri, Torino.

ID. (1989), *I* Principia *di Newton e la* Mécanique *di Lagrange: osservazioni su meccanica e calcolo*, in G. Tarozzi, M. Van Vloten (a cura di), *Radici, significato, retaggio dell'opera newtoniana*, Società Italiana di Fisica, Bologna.

ID. (2007), *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino.

BOTZUNG A., DENKOVA E., MANNING L. (2008), *Experiencing Past and Future Personal Events: Functional Neuroimaging Evidence on the Neural Bases of Mental Time Travel*, in "Brain and Cognition", 66, 2, pp. 202-12 (http://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0278262607001236).

BOYER C. B. (2007), *Storia del calcolo*, Bruno Mondadori, Milano.

BRAVI B., LONGO G. (2015), *The Unconventionality of Nature: Biology, from Noise to Functional Randomness*, in "UCNC", 3-34 (https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-21819-9_1).

BRENTARI C. (2015), *Jakob von Uexküll: The Discovery of the Umwelt between Biosemiotics and Theoretical Biology*, Springer, Berlin.

BROER H., TAKENS F. (2010), *Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York.

BUFFON G. (1745), *Réflexions sur la loi de l'attraction*, in "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences", pp. 493-500.

BUIATTI M., LONGO G. (2013), *Randomness and Multi-Level Interactions in Biology*, in "Theory of biosciences", 132, 3, pp. 139-58.

CALUDE C. (2002), *Information and Randomness*, Springer, Berlin.

CALUDE C., LONGO G. (2016), *Classical, quantum and biological randomness as relative unpredictability*, in "Natural Computing", 15, 2, pp. 263-78.

CASINI P. (1980), *Filosofia e fisica da Newton a Kant*, Loescher, Torino.

CASSIRER E. (1970), *Determinismo e indeterminismo nella fisica moderna*, La Nuova Italia, Firenze.

CELLETTI A., PEROZZI E. (2007), *Ordine e caos nel Sistema solare*, UTET, Torino.

CERCIGNANI C. (1997), *Boltzmann e la meccanica statistica*, La Goliardica Pavese, Pavia.

CERUTI M. (1986), *Il vincolo e la possibilità*, Feltrinelli, Milano.

CHAPIN S. L. (1995), *The Shape of the Earth*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 22-34.

CHIBBARO S., RONDONI L., VULPIANI A. (1992), *Reductionism, Emergence and Levels of Reality*, Springer, New York-Berlin.

CHOUARD T. (2010), *Evolution: Revenge of the hopeful monster*, in "Nature", 463, pp. 864-7.

CINI M. (1999), *Un paradiso perduto*, Feltrinelli, Milano.

CLAIRAUT A.-C. (1745), *Dissertation du système du monde dans les principes de la gravitation universelle*, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, pp. 329-64.

ID. (1765), *Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances*, Dessaint et Saillant, Paris.

ID. (1808), *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Courcier, Paris.

COHEN B. (1982), *La rivoluzione newtoniana*, Feltrinelli, Milano.

COMTE A. (1830), *Cours de philosophie positive*, vol. I, Rouen, Paris.

CONNES A. (1994), *Non-Commutative Geometry*, Academic Press, New York.

CORNELL E., WIEMAN C. (1999), *Dynamics of Collapsing and Exploding Bose-Einstein Condensates*, in "Nature", 412, pp. 295-9.

CRASTA F. M. (1980), *Pianeti e teorie del cielo nel Settecento*, Loescher, Torino.

CRUTCHFIELD J. P. *et al.* (1991), *Il caos*, in G. Casati (a cura di), *Il caos. Le leggi del disordine*, Le Scienze, Milano.

D'ALEMBERT J.-B. (1758), *Traité de dynamique*, David, Paris.

ID. (1822), *Quatorzième mémoire. Réflexions sur le problème des trois corps, avec de nouvelles tables de la Lune*, in *Œuvres complètes*, vol. II, Belin, Paris, pp. 239-312.

DAHAN-DALMÉDICO A., CHABERT J.-L., CHEMLA K. (éds.) (1992), *Chaos et déterminisme*, Seuil, Paris.

DAVIS M. (1958), *Computability and Unsolvability*, McGraw-Hill, New York (trad. it. *Computabilità e insolubilità*, Abete, Roma 1974).

ID. (1965) (ed.), *The Undecidable*, Raven, New York.

DE ANGELIS V. (1996), *La logica della complessità*, Bruno Mondadori, Milano.

DEACON T. (2011), *Incomplete Nature: How Mind Emerged from Matter*, Norton & Co., New York.

ID. (2015), *Steps to a science of biosemiotics*, in "Green Letters", 19, 3, pp. 1-19.

DEL GIUDICE E., PREPARATA G. (1998), *A New QED Picture of Water: Understanding a Few Fascinating Phenomena*, in E. Sassaroli *et al.* (eds.), *Macroscopic Quantum Coherence*, World Scientific, London.

DEL GIUDICE E., VITIELLO G. (2006), *Role of the Electromagnetic Field in the Formation of Domains in the Process of Symmetries-Breaking Phase Transitions*, in "Physical Review", A 74.

DEL GIUDICE E. *et al.* (1986), *Electromagnetic Field and Spontaneous Symmetry Breaking in Biological Matter*, in "Nuclear physics", B 275.

DESPRAT N. *et al.* (2008), *Tissue Deformation Modulates Twist Expression to Determine Anterior Midgut Differentiation in* Drosophila embryos, in "Developmental cell", 15, 3, pp. 470-7.

DESSÌ P. (1982), *Laplace e la probabilità*, in "Rivista di filosofia", 24, pp. 313-32.

DEUTSCH J. (2012), *Le gène. Un concept en evolution*, Seuil, Paris.

DEVANEY R. (1989), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Boston.

DIACU F., HOLMES P. (1996), *Celestial Encounters*, Princeton University Press, Princeton (NJ).

DIRAC P. (1971), *I princìpi della meccanica quantistica*, Bollati Boringhieri, Torino.

DISERTORI M., SABOT C., TARRÈS P. (2014), *Transience of Edge-Reinforced Random Walk*, https://arxiv.org/pdf/1403.6079.pdf.

DRAZIN P., JOHNSON R. (1989), *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (MA).

DUCAN A. W. (2013), *Aneuploidy, Polyploidy and Ploidy Reversal in the Liver*, in "Seminars in Cell and Developmental Biology", 24, 4, pp. 347-56.

EDELMAN G. M. (1990), *The Remembered Present: A Biological Theory of Consciousness*, Basic Books, New York.

EDELMAN G. M., GALLY J. A. (2001), *Degeneracy and Complexity in Biological Systems*, in "Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America", 98, 24, pp. 13763-8.

EDELMAN G. M., TONONI G. (2000), *A Universe of Consciousness How Matter Becomes Imagination*, Basic Books, New York.

EINSTEIN A., PODOLSKY B., ROSEN N. (1935), *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, in "Physical Review", 47 (10), pp. 777-80.

EULER L. (1743), *De causa gravitatis*, in "Miscellanea Berolinensea", 7, pp. 360-70.

ID. (1912), *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, in Id., *Opera Omnia*, Teubner, Leipzig.

ID. (1960a), *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturn et de Jupiter*, in Id., *Opera omnia*, 25, 2, Teubner, Leipzig.

ID. (1960b), *Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*, in Id., *Opera omnia*, 25, 2, Teubner, Leipzig.

EVERETT H. (1957), *"Relative State" Formulation of Quantum Mechanics*, in "Reviews of Modern Physics", 29, pp. 454-62.

FEIGENBAUM M. J. (1979), *Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations*, in "StatPhys", 21, pp. 669-706.

FELIN T. *et al.* (2014), *Economic Opportunity and Evolution: Beyond Landscapes and Bounded Rationality*, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01415115/document.

FERNANDEZ SANCHEZ M. *et al.* (2010), *Mechanical Induction in Embryonic Development and Tumor Growth: Integrative Cues Through Molecular to Multicellular Interplay and Evolutionary Perspectives*, in "Methods in cell biology", dicembre, 98, pp. 295-321.

FOURIER J. B. J. (1888), *Théorie analitique de la chaleur*, in *Œuvres de Fourier*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris.

FRASER C. G. (1983), *J. L. Lagrange's Erly Contributions to the Principles and Method of Mechanics*, in "Archive for History of Exact Sciences", 28, 3, pp. 197-241.

ID. (1985), *J. L. Lagrange's Changing Approch to the Foundation of the Calculus of Variations*, in "Archive for History of Exact Sciences", 32, 2, pp. 151-91.

ID. (1987), *J. L. Lagrange's Algebraical Vision of the Calculus*, in "Historia Mathematica", 14, 1, pp. 38-53.

ID. (1989), *The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century*, in "Archive for History of Exact Sciences", 39, 4, pp. 317-35.

ID. (1992), *Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange*, in "Historia Mathematica", 19, 1, pp. 4-23.

ID. (2001), *The Background to and Early Emergence of Euler's Analysis*, in M. Otte, M. Panza (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer Academic, Dordrecht-Boston-London, pp. 47-78.

GALILEI G. (2005), *Il Saggiatore*, in Id., *Opere*, vol. 1, UTET, Torino.

GALLAVOTTI G. (2010), *Statistical Mechanics: A Short Treatise*, Springer, Berlin-Heidelberg.

GANDY R. O. (1980), *Church's Thesis and Principles for Mechanisms*, in J. Barwise *et al.* (eds.), *The Kleene Symposium*, North Holland, Amsterdam.

GARGANI A. G. (1993), *Stili di analisi*, Feltrinelli, Milano.

ID. (2009), *Il sapere senza fondamenti*, Mimesis, Milano-Udine (1ª ed. Einaudi, Torino 1975).

GHIRARDI G. (2009), *Un'occhiata alle carte di Dio*, Il Saggiatore, Milano.

GIL F. (1981), *Il tempo del pensiero*, in R. Romano (a cura di), *Le frontiere del tempo*, Il Saggiatore, Milano.

GLEICK J. (2005), *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Rizzoli, Milano.

GOGARTEN P., TOWNSEND J. (2005), *Horizontal Gene Transfer, Genome Innovation and Evolution*, in "Nature Reviews. Microbiology", ottobre, 3, pp. 679-87.

GOLDENFELD N., WOESE C. (2011), *Life is Physics: Evolution as a Collective Phenomenon Far From Equilibrium*, in "Annual Review of Condensed Matter Physics", 2, 1, pp. 375-99.

GOLDSCHMIDT R. (1960), *The Material Basis of Evolution*, Yale University Press, New Haven (CT).

GOULD S. J. (1989), *Wonderful Life*, Norton & Co., New York.

ID. (1996), *Full House*, Three rivers press, New York.

ID. (2002), *The Structure of Evolutionary Theory*, Harvard University Press, Boston.

GOULD S. J., VRBA E. S. (1982), *Exaptation: A Missing Term in the Science of Form*, in "Paleobiology", 8, 1, pp. 4-15.

GRAFEN A. (2014), *The Formal Darwinism Project in Outline*, in "Biology and Philosophy", 29, pp. 155-74.

GRANT B. R., GRANT P. R. (1993), *Evolution of Darwin's finches caused by a rare climatic event*, in "Proceedings of the Royal Society of London", 251, 1331, pp. 111-7.

GRASSBERG P., PROCACCIA I. (1983), *Characterization of Strange Attractors*, in "Physical Review Letters", 50, pp. 346-9.

GUCKENHEIMER J., HOLMES P. (1983), *Non-linear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, Berlin-Heidelberg.

GUICCIARDINI N. (1996), *Newton: un filosofo della natura e il sistema del mondo*, Le Scienze, Milano.

ID. (1999), *Reading the* Principia, Cambridge University Press, Cambridge.

GUICCIARDINI N., INTROZZI G. (2007), *Fisica quantistica. Una introduzione*, Carocci, Roma.

HALMOS P. (1950), *Measure Theory*, Van Nostrand, New York.

HANKS L. (1966), *Buffon avant l'histoire naturelle*, Presses Universitaires de France, Paris.

HANSSMANN H. (2007), *Local and Semi-Local Bifurcations in Hamiltonian Dynamical Systems*, Springer, Berlin-Heidelberg.
HARMS R., THORNTON J. (2014), *Historical Contingency and its Biophysical Basis in Glucocorticoid Receptor Evolution*, in "Nature", 512, pp. 203-7.
HEISENBERG W. (2003), *Fisica e filosofia*, Il Saggiatore, Milano.
ID. (2010), *La partie et le tout. Le monde de la physique atomique*, Flammarion, Paris.
HIRSCH M. W., SMALE S. (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Cambridge (MA).
HODGES A. (1983), *Alan Turing: The Enigma*, Simon and Schuster, New York (trad. it. *Storia di un enigma. Vita di Alan Turing 1912-1954*, Bollati Boringhieri, Torino 1991).
HODGKIN A., HUXLEY A. (1952), *A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve*, in "The Journal of Physiology", 117, pp. 500-44.
HOFSTADTER D. R. (1991), *Attrattori strani: enti fra ordine e caos*, in G. Casati (a cura di), *Il caos. Le leggi del disordine*, Le Scienze, Milano.
HURTADO P., LASANTA A., PRADOS A. (2018), *Typical and Rare Fluctuations in Nonlinear Driven Diffusive Systems with Dissipation*, https://arxiv.org/pdf/1302.6544.pdf.
HUXLEY J. (1943), *Evolution, the Modern Synthesis*, Harper and Brothers, New York-London.
ISLAM J. N. (2001), *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.
ISRAEL G. (1991), *Il determinismo e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, in "Physis", XXVIII.
ID. (2001), *The Analytical Method in Descartes'* Géométrie, in M. Otte, M. Panza (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer Academic, Dordrecht-Boston-London, pp. 3-34.
ID. (2003), *La visione matematica della realtà*, Laterza, Roma-Bari.
JABLONKA E., LAMB M. J. (1998), *Epigenetic Inheritance in Evolution*, in "Journal of Evolutionary Biology", 11, pp. 159-83.
IDD. (2008), *Evolution in Four Dimensions*, The MIT Press, Boston.
JACOB F. (1970), *La logique du vivant*, Gallimard, Paris.
ID. (1981), *Le Jeu des possibles*, Fayard, Paris.
JÜRGENS H., PEITIGEN H., SAUPE D. (1991), *Il linguaggio dei frattali*, in G. Casati (a cura di), *Il caos. Le leggi del disordine*, Le Scienze, Milano.
KAUFMANN S. (1993), *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*, Oxford University Press, Oxford.
ID. (2002), *Investigations*, Oxford University Press, New York.
KEELING P. J., PALMER J. D. (2008), *Horizontal Gene Transfer in Eukaryotic Evolution*, in "Nature Reviews Genetics", 9, 8, pp. 605-18.
KELLEY J. L. (1955), *General Topology*, Van Nostrand, New York.
KLINE M. (1985), *La perdita della certezza*, Arnoldo Mondadori, Milano.
KOGAN O. (2018), *Onset of Singularities in the Pattern of Fluctuational Paths of a Nonequilibrium System*, https://arxiv.org/pdf/1110.2820.pdf.

KOPPL R. *et al.* (2015), *Economy for a Creative World*, in "Journal of Institutional Economics", 11, 1, pp. 1-31.

KORTEWEG D., VRIES G. DE (1895), *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves*, in "Philosophical Magazine", 39, pp. 422-43.

KOSMANN-SCHWARZBACH Y. (2010), *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, Springer, Berlin.

KUPIEC J. (2012), *L'ontophylogenèse*, Quæ, Versailles.

KUPIEC J., SONIGO P. (2000), *Ni Dieu ni gène*, Seuil, Paris.

LAGRANGE J.-L. (1788), *Méchanique analitique*, La Veuve Desaint, Paris.

ID. (1877a), *Recherches sur la libration de la Lune*, in *Œuvres de Lagrange*, vol. 6., Gauthier-Villars, Paris, pp. 5-61.

ID. (1877b), *Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle*, in *Œuvres de Lagrange*, vol. 6., Gauthier-Villars, Paris, pp. 63-225.

ID. (1877c), *Essai sur le problème des trois corps*, in *Œuvres complètes*, vol. 6, Gauthier-Villars, Paris, pp. 229-31.

ID. (1877d), *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, in *Œuvres complètes*, vol. 10, Gauthier-Villars, Paris, pp. 5-451.

LAMBERT J. H. (1767), *Solution générale et absolue du problème des trois corps moyennant des suites infinies*, in "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin", 23, pp. 353-64.

ID. (2006), *Philosophische Schriften*, in *Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues*, vol. 5, Olms, Hildesheim-Zürich-New York.

LANDAU L., LIFSHITZ E. (2013), *Meccanica dei fluidi*, Editori Riuniti, Roma.

LAPLACE P. S. (1884a), *Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune*, in Id., *Œuvres complètes*, vol. 11, Gauthier-Villars, Paris, pp. 243-71.

ID. (1884b), *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, in Id., *Œuvres complètes*, vol. 11, Gauthier-Villars, Paris, pp. 49-92.

ID. (1884c), *Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes*, in Id., *Œuvres complètes*, vol. 11, Gauthier-Villars, Paris, pp. 295-301.

ID. (1884d), *Théorie de Jupiter et de Saturne*, in Id., *Œuvres complètes*, vol. 11, Gauthier-Villars, Paris, pp. 95-207, 211-39.

ID. (1884e), *Théorie des satellites de Jupiter*, in Id., *Œuvres complètes*, vol. 11., Gauthier-Villars, Paris, pp. 309-411, 415-73.

ID. (1967a), *Saggio filosofico sulle probabilità*, in Id., *Opere*, UTET, Torino.

ID. (1967b), *Saggio sulla probabilità delle cause in base agli avvenimenti*, in Id., *Opere*, UTET, Torino.

ID. (1967c), *Teoria analitica delle probabilità*, in Id., *Opere*, UTET, Torino.

LASKAR J. (1994), *Large scale chaos in the Solar System*, in "Astronomy & Astrophysics", 287, L9-L12.

LEIBNIZ G. W., CLARKE S. (2007), *Exchange of Papers between Leibniz and Clarke*, ed. by J. F. Bennet, http://www.earlymoderntexts.com/pdfs/leibniz1715_1.pdf.

lemke h., coutinho a., lange h. (2004), *Lamarkian Inheritance by Somatically Acquired Maternal IgG Phenotypes*, in “Trends in Immunology”, maggio, 25, pp. 180-6.

lesne a. (2008), *Robustness: Confronting Lessons from Physics and Biology*, in “Biological Review”, 83, pp. 509-32 (https://onlinelibrary.wiley.com/toc/1469185x/2008/83/4).

lesne a. *et al.* (2015), *Chromatin Fiber Allostery and the Epigenetic Code*, in “Journal of Physics: Condensed Matter”, 27, 6 (https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/27/6/064114).

lyapunov m. a. (1966), *Stability of Motion*, Academic Press, Cambridge (ma).

linton c. m. (2004), *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.

longair m. (2006), *The Cosmic Century: A History of Astrophysics and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.

longo g. (2009), *Critique of Computational Reason in the Natural Sciences*, http://www.di.ens.fr/users/longo/.

id. (2010), *Incompletezza*, in *Per la matematica*, vol. 4, Einaudi, Torino (http://www.di.ens.fr/users/longo/download.html).

id. (2015), *Conceptual Analyses from a Grothendieckian Perspective: Reflections on Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics by Fernando Zalamea*, in “Speculations”, dicembre, 251, 1331 (https://www.urbanomic.com/speculations_lo).

id. (2016), *Comment le future dépend du passé et des événements rares dans le systèmes du vivant*, in A. Berthoz, C. Ossola (éds.), *La liberté de l’improbable*, Collège de France, Paris.

id. (2018), *Information and Causality: Mathematical Reflections on Cancer Biology*, in “Organisms. Journal of Biological Sciences”, 2, 1, pp. 83-103.

id. (2019), *The Biological Consequences of the Computational World: Mathematical Reflections on Cancer Biology*, in “Organisms. Journal of Biological Sciences”, 2, 1, pp. 83-103.

longo g., montévil m. (2012a), *Randomness Increases Biological Organization: A Mathematical Understanding of Gould’s Critique of Evolutionary Progress*, conferenza “Stephen J. Gould heritage: Nature, History, Society”, Venezia, maggio 10-12, 2012, https://pdfs.semanticscholar.org/c652/c0cb1a9c272ca44ad0e10c6f22f1eb90e843.pdf

idd. (2012b), *Randomness Increases Order in Biological Evolution*, in M. Dinneen, B. Khoussainov, A. Nies (eds.), *Computation, Physics and Beyond*, Springer, Berlin-Heidelberg, pp. 289-308.

idd. (2012c), *The Inert* vs. *the Living State of Matter: Extended Criticality, Time Geometry, Anti-Entropy: An Overview*, in “Frontiers in Physiology”, 3, p. 39 (https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphys.2012.00039).

idd. (2013), *Extended Criticality, Phase Spaces and Enablement in Biology*, in “Chaos, solitons & fractals”, 55, pp. 64-79.

idd. (2014), *Perspectives on Organism: Biological Time, Symmetries and Singularities*, Springer, Berlin.

IDD. (2017), *Comparing Symmetries in Models and Simulations*, in *Springer Handbook of Model-Based Science*, Springer, Cham, pp. 843-56.
LONGO G., MONTÉVIL M., KAUFFMAN S. (2012), *No Entailing Laws, but Enablement in the Evolution of Biosphere*, in "ACM Proceeding of GECCO", pp. 1379-92.
LONGO G., MUGUR-SCHÄCHTER M. (eds.) (2014), *Developments of the Concepts of Randomness, Statistic, and Probability*, in "Mathematical Structures in Computer Science", 24, 3.
LONGO G., PERRET N. (2017), *Contributions to a Theory of Biological Time: Anticipation, Protention and Biological Inertia*, in E. Ippoliti (ed.), *Building Theories, Sciences and Hypotheses*, Springer, Cham.
LONGO G., SENO L. (2018), *Digital Networks, Knowledge and Political Biases in their Understanding and Use*, The MIT Press, Cambridge (https://www.di.ens.fr/users/longo/files/longo_senoNetworksEntrop.pdf).
LONGO G. *et al.* (2012), *Is Information a Proper Observable for Biological Organization?*, in "Progress in Biophysics and Molecular Biology", 109, 3, pp. 108-14 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079610712000454?via%3Dihub).
LONGO G. *et al.* (2015), *In Search of Principles for a Theory of Organisms*, in "Journal of Biosciences", dicembre, 40, 5, pp. 955-68.
LORENZ E. (1963), *Deterministic Non-Periodic Flow*, in "Journal of the Atmospheric Science", 20, pp. 130-41.
MACCONE L., SALASNICH L. (2008), *Meccanica quantistica, caos e sistemi complessi*, Carocci, Roma.
MACH E. (2008), *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Bollati Boringhieri, Torino.
MAMIANI M. (1990), *Introduzione a Newton*, Laterza, Roma-Bari.
MANDELBROT B. (1987), *La geometria della natura. Sulla teoria dei frattali*, Imago, Milano.
ID. (2000), *Gli oggetti frattali*, Einaudi, Torino.
MARCOLONGO R. (1919), *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni*, Hoepli, Milano.
MARINUCCI A. (2011), *Tra ordine e caos. Metodi e linguaggi tra fisica, matematica e filosofia*, Aracne, Roma.
ID. (2012), *Linearità e non linearità tra fisica e matematica prima di Poincaré*, in "Epistemologia", XXXV, pp. 299-317.
ID. (in stampa), *Biologie relationnelle*.
MAY R. M. (1976), *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*, in "Nature", 261, pp. 459-66.
MIQUEL P. A. (2015), *Sur le concept de nature*, Hermann, Paris.
MISSLIN R. (2004), *Une vie de cellule. Forme et espace*, in "Revue de Synthèse", 124, pp. 205-21.
MONOD J. (1989), *Le hasard et la nécessité*, France Loisirs, Paris.
MONTÉVIL M. (2017), *A Primer on Mathematical Modeling in the Study of Organisms and their Parts*, in M. Bizzarri (ed.), *Conceptual and Methodological challenges in Systems Biology*, Springer, Cham.

MONTÉVIL M., MOSSIO M. (2015), *Biological Organisation as Closure of Constraints*, in "Journal of Theoretical Biology", 372, pp. 179-91.
MONTÉVIL M. *et al.* (2016), *Modeling Mammary Organogenesis from Biological first Principles: Cells and their Physical Constraints*, in "Progress in Biophysics and Molecular Biology", 122, 1, pp. 58-69.
MORANDO B. (1995), *Laplace*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 131-50.
MORENO A., MOSSIO M. (2015a), *Biological Autonomy*, Springer, New York.
IDD. (2015b), *Biological Autonomy: A Philosophical and Theoretical Enquiry*, Springer, New York.
MOSCHOVAKIS Y. N. (1998), *On Founding the Theory of Algorithms*, in H. G. Dales, G. Oliveri (eds.), *Truth in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.
MOSSIO M., BICH L., MORENO A. (2013), *Emergence, Closure and Inter-Level Causation in Biological Systems*, in "Erkenntnis", 78, 2, pp. 153-78.
MOSSIO M., MONTÉVIL M., LONGO G. (2016), *Theoretical Principles for Biology: Organization*, in A. Soto, G. Longo (eds.), *From Century of the Genome to the Century of the Organism: New Theoretical Approaches*, Special issue of "Progress in Biophysics and Molecular Biology", vol. 122, Pergamon, Oxford, pp. 40-55.
MOSSIO M., MORENO M. (2010), *Organisational Closure in Biological Organisms*, in "History and Philosophy of the Life Sciences", 32, pp. 269-88.
NEEDHAM J. (1951), *Human Laws and the Laws of Nature in China and the West*, in "Journal of the History of Ideas", 12, 3-32, pp. 194-231.
NEWTON I. (2008), *Princìpi matematici della filosofia naturale*, Arnoldo Mondadori, Milano.
ID. (2018), *Princìpi matematici della filosofia naturale*, a cura di F. Giudice, Einaudi, Torino.
NICOLIS G., PRIGOGINE I. (1977), *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems*, Wiley, New York.
NOBLE D. (2003), *La musica della vita*, Bollati Boringhieri, Torino.
NOWACKI M., LANDWEBER L. (2009), *Epigenetic Inheritance in Ciliates*, in "Current Opinion in Microbiology", ottobre, 12, pp. 638-43.
NOWELL P. C. (1976), *The Clonal Evolution of Tumor Cell Populations*, in "Science", 194, pp. 123-8.
ODIFREDDI P. (1989), *Classical Recursion Theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers*, North Holland, Amsterdam.
OMNÉS R. (1994), *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton.
PAABY A., ROCKMAN M. (2014), *Cryptic Genetic Variation: Evolution's Hidden Substrate*, in "Nature Reviews Genetics", marzo, 15, pp. 247-58.
PÁL C., PAPP B., LERCHER M. (2006), *Adaptive Evolution of Bacterial Metabolic Networks by Horizontal Gene Transfer*, in "Nature genetics", gennaio, 37, pp. 1372-5.
PALA A. (1969), *Isaac Newton*, Einaudi, Torino.
PANZA M. (2001), *Classical Sources for the Concepts of Analysis and Synthesis*, in M. Otte, M. Ponza (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer Academic, Dordrecht-Boston-London, pp. 365-414.

PELITI L. (2003), *Appunti di meccanica statistica*, Bollati Boringhieri, Torino.
PENROSE R. (1994), *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, Oxford (trad. it. *Ombre della mente. Alla ricerca della coscienza*, Rizzoli, Milano 1996).
PERUTZ M. (2007), *Le molecole dei viventi*, Di Renzo, Roma.
PERUZZI G. (a cura di) (2000), *Scienza e realtà*, Bruno Mondadori, Milano.
PLANKAR M., JERMAN I., KRAŠOVEC R. (2011), *On the Origin of Cancer: Can we Ignore Coherence?*, in "Progress in Biophysics and Molecular Biology", agosto, 106, pp. 380-90.
POINCARÉ J.-H. (1881), *Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle* (première partie), in "Journal de mathèmatiques pures et appliquèes", 3, VII, pp. 375-422.
ID. (1890), *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, in "Acta mathematica", 13, pp. 1-270.
ID. (1907), *Le hazard*, in "Revue du mois", 3, pp. 256-7.
ID. (1993), *New Methods of Celestial Mechanics*, a cura di D.-L. Goroff, American Institute of Physics, Woodbury (NY).
ID. (1995a), *Il problema dei tre corpi*, in C. Bartocci (a cura di), *Geometria e caso*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 40-50.
ID. (1995b), *Il caso*, in C. Bartocci (a cura di), *Geometria e caso*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 105-24.
PRIGOGINE I. (1986), *Dall'essere al divenire*, Einaudi, Torino.
ID. (1997), *La fine delle certezze. Il tempo, il caos e le leggi della natura*, Bollati Boringhieri, Torino.
ID. (2006), *Le leggi del caos*, Laterza, Roma-Bari.
ID. (2007), *La fine delle certezze*, in R. Benkirane (a cura di), *La teoria della complessità*, Bollati Boringhieri, Torino.
PRIGOGINE I., NICOLIS G. (1991), *La complessità*, Einaudi, Torino.
PRIGOGINE I., STENGERS I. (2007), *La nuova alleanza*, Einaudi, Torino.
PROCHIANTZ A. (2011), *Les anatomies de la pensée*, Odile Jacob, Paris.
RANDO O., VERSTREPEN V. (2007), *Timescales of Genetic and Epigenetic Inheritance*, in "Cell", 128, 4, pp. 655-68.
ROUX S. (2009), *Controversies on Legality (1680-1710)*, in M. Daston, L. Stolleis (eds.), *Natural Law and Laws of Nature in Early Modern Europe*, Ashgate, Farnham, pp. 199-214.
ROVELLI C. (1996), *Relational Quantum Mechanics*, in "International Journal of Theoretical Physics", 8, 35, pp. 1637-78.
ID. (2008), *Forget Time*, https://arxiv.org/pdf/0903.3832.pdf.
ID. (2010), *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge.
ID. (2015), *Is Time's Arrow Perspectival?*, https://arxiv.org/pdf/1505.01125v2.pdf.
ROWAN S., HOUGH J., CROOKS D. R. M. (2005), *Thermal Noise and Material Issues for Gravitational Wave Detectors*, in "Physics Letters", novembre, A 347, pp. 25-32.
RUELLE D. (1991), *Determinismo e predicibilità*, in G. Casati (a cura di), *Il caos. Le leggi del disordine*, Le Scienze, Milano.
ID. (2003), *Caso e caos*, Bollati Boringhieri, Torino.

RUELLE D., TAKENS F. (1971), *On the Nature of Turbulence*, in "Communications in Mathematical Physics", 20, 3, pp. 167-92.

RUSSO L. (1996), *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano.

SACCHI LADRIANI G., GIORILLI A. (a cura di) (2008), *Sfogliando la Méchanique analitique*, Giornata di studio su Louis Lagrange, LEL.

SARTI A., CITTI G., PIOTROWSKI D. (2019), *Differential Heterogenesis and the Emergence of Semiotic Function*, in "Semiotica", 230, pp. 1-34.

SCHOMRAT T., LEVIN M. (2013), *An Automated Training Paradigm Reveals Long-term Memory in Planarians and its Persistence through Head Regeneration*, in "The Journal of Experimental Biology", 210, pp. 3799-810.

SCHWARTZ L. (1951), *Théorie des Distributions 1-2*, Hermann, Paris.

SIEGEL C. (1969), *Topics in Complex Function Theory*, Wiley-Interscience, New York.

SONNENSCHEIN C., SOTO A. (2007), *The Society of Cells*, Taylor & Francis, New York.

SOTO A., LONGO G. (eds.) (2016a), *From the Century of the Genome to the Century of the Organism: New Theoretical Approaches*, Special issue of "Progress in Biophysics and Molecular Biology", vol. 122, 1.

IDD. (2016b), *Toward a Theory of Organism: Three Founding Principles in Search of Useful Integration*, in Idd. (2016a), pp. 100-6.

SOTO A., MAFFINI M., SONNENSCHEIN C. (2008), *Neoplasia as Development Gone Awry: The Role of Endocrine Disruptors*, in "International Journal of Andrology", aprile, 31, 2, pp. 263-78.

SOUZA F. DE, FRANCHINI L., RUBINSTEIN M. (2013), *Exaptation of Transposable Elements into Novel Cis-Regulatory Elements: Is the Evidence Always Strong?*, in "Molecular Biology and Evolution", giugno, 30, 6, pp. 1239-51.

STROGATZ S. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, Boston.

SZPUNAR K., WATSON J. M., MCDERMOTT K. B. (2007), *Neural Substrates of Envisioning the Future*, in "Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America", gennaio, 104, 2, pp. 642-7.

TABOR M. (1989), *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley & Sons, New York.

TAGLIAGAMBE S. (1991), *L'epistemologia contemporanea*, Editori Riuniti, Roma.

THOM R. (1985), *Stabilità strutturale e morfogenesi. Saggio di una teoria generale dei modelli*, Einaudi, Torino.

TORDAY J. S. (2015), *What We Talk About When We Talk About Evolution*, in "Cell Communication Insights", 7, pp. 1-15.

TURING A. M. (1936), *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, in Davis (1965), pp. 115-53.

ID. (1992), *Mechanical Intelligence*, North Holland, Amsterdam (trad. it. *Intelligenza meccanica*, Bollati Boringhieri, Torino 1994).

UZAN J.-P. (2011), *Varying Constants, Gravitation and Cosmology*, in "Living Reviews in Relativity", 14, 2, pp. 1-15.

VARELA F. (1979), *Principles of Biological Autonomy*, North Holland, New York.

VENDITTI C., MEADE A., PAGEL M. (2010), *Phylogenies Reveal new Interpretation of Speciation and the Red Queen*, http://www.amphibiatree.org/sites/amphibiatree.org/files/VendittiNature2010.pdf.

VERHULST F. (1996), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Berlin-Heidelberg.

VILLOUTREIX P. (2015), *Randomness and Variability During Embryogenesis A Multi-Scale Approach*, tesi di dottorato, École normale supérieure de Paris.

VULPIANI A. *et al.* (eds.) (2014), *Large Deviations in Physics*, Springer, New York.

WAFF C. B. (1976), *Universal Gravitation and the Motion of the Moon's Apogee: The Establishment and Reception of Newton's Inverse-Square Law, 1687-1749*, tesi di dottorato, The Johns Hopkins University Press, Baltimora.

ID. (1995), *Clairaut and the Motion of the Lunar Apse: The Inverse-Square Law Undergoes a Test*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 35-46.

WANG H. (1974), *From Mathematics to Philosophy*, Routledge, London (trad. it. *Dalla matematica alla filosofia*, Bollati Boringhieri, Torino 1984).

ID. (1981), *Popular Lectures on Mathematical Logic*, Van Nostrand Reynold, New York.

WEBB J. (1980), *Mechanism, Mentalism and Metamathematics*, John Wiley & Sons, New York.

WEINBERG R. (2014), *Coming Full Circle from Endless Complexity to Simplicity and Back Again*, in "Cell", 157, pp. 267-71.

WEST-EBERHARD M. J. (2003), *Developmental Plasticity and Evolution*, Oxford University Press, New York.

ID. (2005), *Developmental Plasticity and the Origin of Species Differences*, in "Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America", 102, 1, pp. 6543-9.

WEYL H. (1949), *Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences*, Princeton University Press, Princeton.

WILSON C. (1995a), *The Precession of the Equinoxes from Newton to d'Alembert and Euler*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 47-54.

ID. (1995b), *The Problem of Perturbation Analytically Treated: Euler, Clairaut, d'Alembert*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 89-107.

ID. (1995c), *The Work of Lagrange in Celestial Mechanics*, in *The General History of Astronomy*, vol. 2, pp. 108-30.

ZALAMEA F. (2012), *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*, Urbanomic e Sequence Press, New York.

ZELNIK Y., SOLOMON S., YAARI G. (2015), *Species Survival Emerge from Rare Events of Individual Migration*, in "Scientific reports", gennaio, 5, p. 7877.

Gli autori

LUCA BELLOTTI è professore associato di Logica presso il Dipartimento di Civiltà e forme del sapere dell'Università di Pisa. Le sue aree di specializzazione sono la logica matematica e la filosofia della matematica, ma ha interessi generali di teoria della conoscenza, epistemologia e filosofia del linguaggio.

ANDREA CINTIO è dottore in Fisica. Si è occupato dell'applicazione della teoria delle perturbazioni della meccanica hamiltoniana a modelli con pochi gradi di libertà di interazione radiazione-materia. Attraverso l'approccio algebrico alla meccanica statistica, si è interessato alla caratterizzazione delle proprietà spettrali a grandi lunghezze d'onda di sistemi macroscopici di fermioni. Ha collaborato con un gruppo di biofisici nello studio di segnali cerebrali e, attualmente, è impegnato, presso l'Istituto dei processi fisico-chimici del CNR di Pisa, in un'attività sperimentale su sistemi elettromagnetici risonanti.

LEONE FRONZONI è professore associato di Fisica generale II e di Modellizzazione biofisica dei sistemi complessi presso il Dipartimento di Fisica e il Centro interdipartimentale per lo studio dei sistemi complessi (CISSC) dell'Università di Pisa.

ALFONSO MAURIZIO IACONO è professore ordinario di Storia della filosofia presso il Dipartimento di Civiltà e forme del sapere dell'Università di Pisa. Si occupa dei rapporti tra filosofia e antropologia tra XVIII e XX secolo. Ha lavorato sulla nozione di *zòon politikòn*, sui rapporti tra storia e politica, sulla questione filosofico-politica dell'autonomia nei suoi rapporti con i temi della libertà, della democrazia e dell'apprendimento. Si interessa inoltre di epistemologia, in particolare del problema dell'osservatore, dei concetti di "sistema", "complessità", "autopoiesi", della questione della rappresentazione visiva soprattutto da un punto di vista cognitivo, all'interno di una riflessione che cerca nuovi intrecci fra le scienze naturali e le scienze storico-sociali.

GIUSEPPE LONGO è direttore di ricerca presso il Centre Cavaillès – République des Savoirs (CNRS, Collège de France, École Normale Supérieure) di Parigi e *adjunct professor* presso la School of Medicine della Tufts University di Boston. Già professore associato di Logica matematica, poi ordinario di Informatica all'Università di Pisa, ricercatore e professore a Berkeley, MIT, Carnegie Mellon (USA). I suoi studi spaziano dalla logica e dalla teoria della computazione alla teoria dei tipi e alle loro applicazioni alla *computer science*, dai fondamenti cognitivi della matematica a tematiche di frontiera tra fisica, matematica, informatica e biologia teorica.

ANGELO MARINUCCI è ricercatore presso l'Instituto de Filosofia e Ciências Humanas dell'Universidade Federal de Pelotas (Brasile), fa parte dei gruppi di ricerca "Complexité et information morphologique" (CNRS – École Normale Supérieure, Parigi) e del "CriM" (Crítica da modernidade), responsabile professor Oswaldo Giacoia Junior (Unicamp, Brasile). Si interessa principalmente di storia e filosofia della scienza con particolare riferimento alla fisica moderna e contemporanea e alla biologia contemporanea.

STEFANO SALVIA è dottore di ricerca e cultore della materia in Storia della scienza presso il Dipartimento di Civiltà e forme del sapere dell'Università di Pisa. Ha partecipato come *junior scholar* al Research Network internazionale *History of Scientific Objects*, coordinato dal Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte di Berlino. Attualmente collabora con il Museo Galileo – Istituto e Museo di Storia della scienza di Firenze ed è *visiting scholar* presso il Centrum för Vetenskapshistoria della Reale Accademia delle Scienze di Stoccolma. Si interessa principalmente di storia delle scienze fisico-matematiche tra Cinque e Settecento, storiografia e filosofia della scienza tra Otto e Novecento, didattica delle scienze, divulgazione e museologia scientifica.